HP-25

PROGRAMMSAMMLUNG

20 PROGRAMME MIT PROGRAMMABLAUFPLÄNEN UND DURCHGERECHNETEN BEISPIELEN



HP-25

PROGRAMMSAMMLUNG

20 PROGRAMME MIT
PROGRAMMABLAUFPLÄNEN
UND DURCHGERECHNETEN
BEISPIELEN



Der Verfasser übernimmt keine Haftung, die sich aus der Benutzung dieses Programmmaterials oder Teilen davon ergeben.

Anschrift des Verfassers: V. Lehmann, St.R.
Gymnasium auf der Karthause
Zwickauer Straße 1
54 Koblenz

INHALTSVERZEICHNIS

"GEOMETRISCHE REIHEN"

Der Summenwert S_n einer geometrischen Reihe mit n Summanden und dem Anfangsglied a_1 berechnet sich nach der Formel

$$S_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$$

Nach Eingabe von q und zwei weiteren beliebigen Werten wird der fehlende Wert berechnet und abgespeichert.

Das Programm geht davon aus, daß der Speicherinhalt des fehlenden Wertes Null ist und fragt bei (1) und (3) zunächst, welcher Wert berechnet werden soll.

Aus der oben angegebenen Formel ergeben sich die weiteren benötigten Formeln:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S_n(q-1)}{a_1} + 1\right)}{\ln q}$$

$$a_1 = \frac{S_n}{\frac{q^n-1}{q-1}}$$

Die oben angegebene Formel läßt sich nicht nach q auflösen. Zur Berechnung von q wäre daher eine Iterationsformel nötig, und die an sich wünschenswerte Erweiterung des Programms (Berechnung irgendeines beliebigen fehlenden Wertes) ist aus Platzgründen nicht möglich.

START

EINGABE q und 2 der Werte a_1, n, S_n

1: $n=0$?

ja → 6: $n := \dfrac{\ln \left(\dfrac{S_n(q-1)}{a_1}+1\right)}{\ln q}$

nein → 2: $Q := \dfrac{q^n-1}{q-1}$

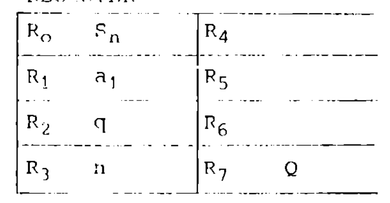
3: $S_n=0$?

ja → 7: $S_n := a_1 \cdot Q$

nein → 4: $a_1 := \dfrac{S_n}{Q}$

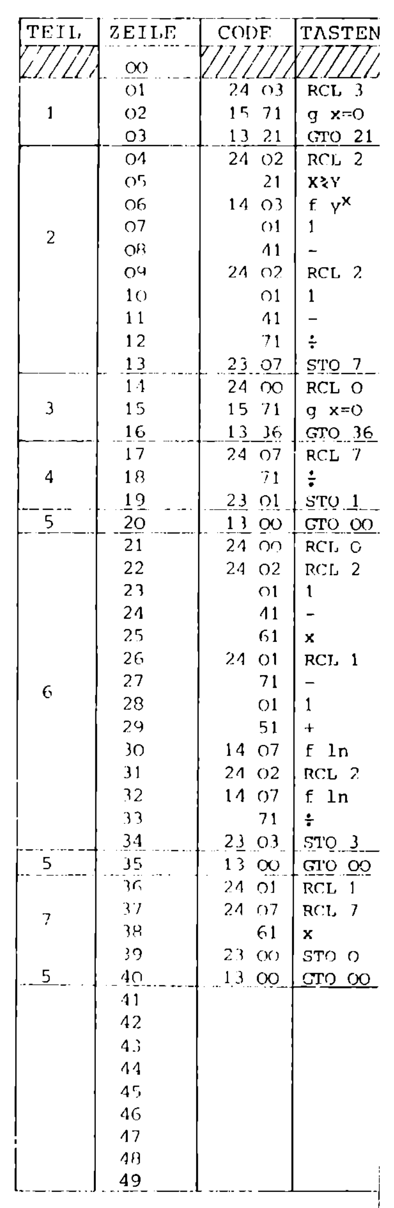
5: AUSGABE fehlender Wert

STOP



REGISTER

R_0	S_n	R_4	
R_1	a_1	R_5	
R_2	q	R_6	
R_3	n	R_7	Q



TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
1	01	24 03	RCL 3
	02	15 71	g x=0
	03	13 21	GTO 21
2	04	24 02	RCL 2
	05	21	x⇄y
	06	14 03	f y^x
	07	01	1
	08	41	-
	09	24 02	RCL 2
	10	01	1
	11	41	-
	12	71	÷
	13	23 07	STO 7
3	14	24 00	RCL 0
	15	15 71	g x=0
	16	13 36	GTO 36
4	17	24 07	RCL 7
	18	71	÷
	19	23 01	STO 1
5	20	13 00	GTO 00
6	21	24 00	RCL 0
	22	24 02	RCL 2
	23	01	1
	24	41	-
	25	61	x
	26	24 01	RCL 1
	27	71	-
	28	01	1
	29	51	+
	30	14 07	f ln
	31	24 02	RCL 2
	32	14 07	f ln
	33	71	÷
	34	23 03	STO 3
5	35	13 00	GTO 00
7	36	24 01	RCL 1
	37	24 07	RCL 7
	38	61	x
	39	23 00	STO 0
5	40	13 00	GTO 00
	41		
	42		
	43		
	44		
	45		
	46		
	47		
	48		
	49		

HP-25 Program Form

Titel "GEOMETRISCHE REIHEN" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritte		f	PRGM	f	REG	
3	q speichern	q	STO	2			
4	Zwei der folgenden	S_n	STO	0			
	Werte a_1, S_n, n	a_1	STO	1			
	eingeben	n	STO	3			
5	Programm starten		R/S				gesuchter
							Wert
6	Für eine neue Rechnung						
	gehen Sie nach 2						

BEISPIEL:

Berechnen Sie den Summenwert der durch folgende Zahlen festgelegten geometrischen Reihe:

a_1 = 1,5 q = 4 n = 10

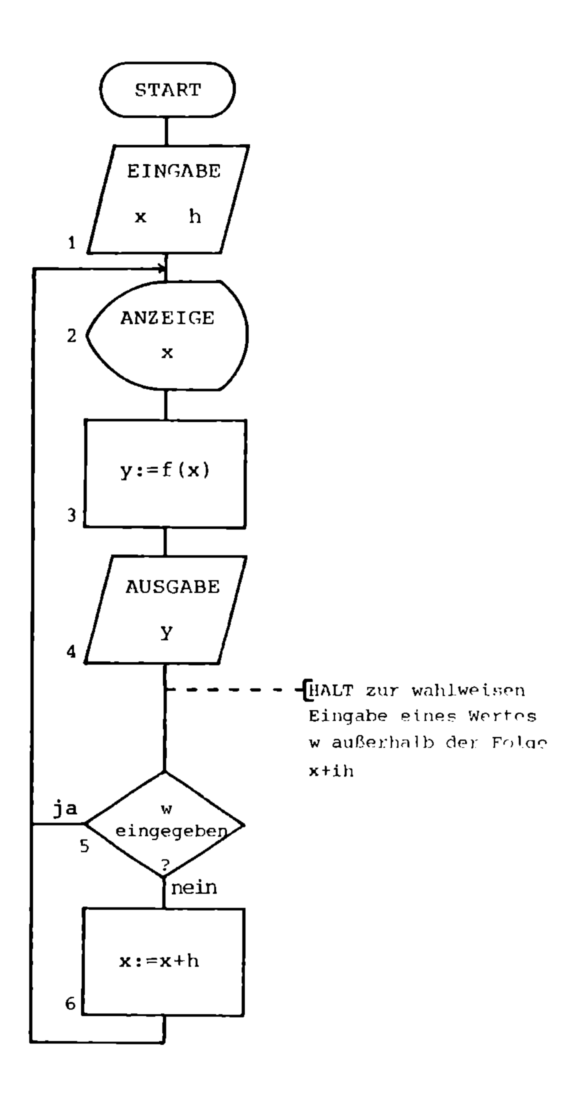
Lösung:

Tasten			Anzeige
1,5	STO 1		
4	STO 2		
10	STO 3	R/S	524287,4996

"WERTETAFEL BEI VORGEGEBENER SCHRITTLÄNGE h"

Das Programm berechnet die Funktionswerte einer beliebig definierbaren Funktion nach Eingabe eines Anfangswertes (linker Randpunkt des Intervalls, für das die Tafel aufgestellt werden soll) und einer Schrittlänge h.

Die Funktion muß ab Programmspeicherzeile 19 definiert werden. Dabei ist das Argument im Anzeigeregister X und in R_0. Als letzter Programmschritt ist GTO 06 einzugeben.
In (2) erfolgt der Sprung nach Zeile 19 um die Definition von f(x) zu erleichtern und der Rücksprung nach Zeile 06.
In (4) wird $10^{99} + f(x)$ ins Y-Register gebracht, f(x) bleibt im X-Register für die Ausgabe von f(x). Im allgemeinen ist daher $x \neq y$ und die Sprunganweisung nach Zeile 13 wird ignoriert.
Falls aber ein x-Wert außerhalb der gewünschten Folge eingegeben wurde (x ENTER↑ R/S), ist die Bedingung x=y erfüllt und es erfolgt der Sprung nach Teil (2) ohne daß x durch x+h ersetzt und die Folge der x-Werte gestört wird.



REGISTER

R_0	x	R_4	
R_1	h	R_5	
R_2		R_6	
R_3		R_7	

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
1	01	23 01	STO 1
	02	21	X↔Y
	03	23 00	STO 0
2	04	14 74	f PAUSE
	05	13 19	GTO 19
4	06	33	EEX
	07	09	9
	08	09	9
	09	21	X↔Y
	10	51	+
	11	14 73	f LASTx
	12	74	R/S
5	13	14 71	f x=y
	14	13 04	GTO 04
6	15	24 01	RCL 1
	16	23 51 00	STO+0
	17	24 00	RCL 0
	18	13 04	GTO 04
3	19		
	20		
	21		
	22		
	23		
	24		
	25		
	26		
	27		
	28		
	29		
	30		
	31		
	32		
	33		
	34		
	35		
	36		
	37		
	38		
	39		
	40		
	41		
	42		
	43		
	44		
	45		
	46		
	47		
	48		
	49		

HP-25 Program Form

Titel "WERTETAFEL BEI VORGEGEBENER SCHRITTLÄNGE h" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Funktion f definieren						
	(x-Wert in X und R_0)						
	Abschluß mit		GTO	0	6		
3	Vorbereitungsschritt		f	PRGM			
4	Anfangswert und	x	↑				
	Schrittlänge speichern	h	R/S				*x
							f(x)
5	Berechnung von f(x+h)		R/S				*x+h
							f(x+h)
6	Für den nächsten Funk-						
	tionswert innerhalb						
	der Folge gehen Sie						
	nach 5						
7	Beliebiger Funktions-						
	wert $\tilde{x}$ außerhalb der						
	Reihe	$\tilde{x}$	↑	R/S			*$\tilde{x}$
							f($\tilde{x}$)
8	Weiter bei 5 oder 7						
9	Für eine neue Funktion						
	gehen Sie nach 2						

BEISPIEL:

Stellen Sie eine Wertetafel im Intervall [-2,2] mit der Schrittlänge h=0,5 auf. Die Funktion sei $y=(x+1)^2$

Lösung:

Programm eintasten und ab Schritt 19 bis Schritt 22 eingeben:

1 + g x^2 GTO 06 rechten Schieber auf RUN

Vorbereitungsschritt f PRGM -2 ↑ 0.5

Tasten		Anzeige	Ausgabe	
	R/S	-2	1	
	R/S	-1.5	0.25	
	R/S	-1	0.00	
	R/S	-0.5	0.25	
-0,75 ↑	R/S	-0.75	0.06	Werte außerhalb
-0,25 ↑	R/S	-0.25	0.56	der Reihe
	R/S	0	1.00	
	R/S	0.5	2.25	u.s.w.

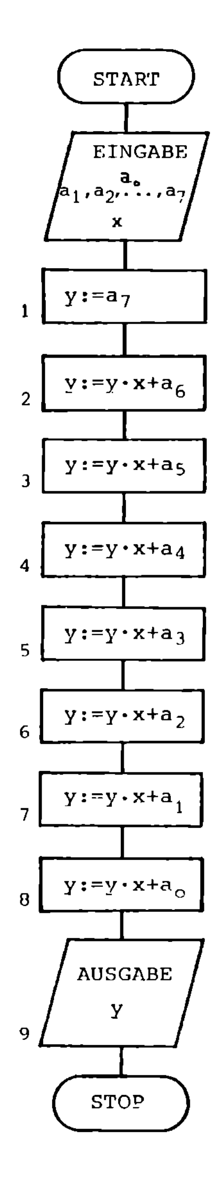
"HORNERSCHEMA FÜR POLYNOME BIS ZUM GRAD 7"

Formt man eine ganzrationale Funktion, z.B. $y=2x^3-4x^2+5x-7$ um in

$$y = (2x^2-4x)\cdot x+5x-7$$
$$= ((2x-4)\cdot x+5)\cdot x-7$$

so hat man bei der Berechnung von f(x) statt acht Rechenoperationen nur sechs durchzuführen. Weiterhin wird das Potenzieren, was bei negativem x zu einer Fehlermeldung führt, vermieden. Dieses am Beispiel erläuterte Verfahren heißt Hornerschema und ist im Programmablaufplan genau dargestellt.

Die ständig sich wiederholenden Multiplikationen mit x werden mit Hilfe der Stackregister auf einfache Weise durchgeführt. Durch dreimaliges Drücken der ENTER-Taste wird x in alle Stackregister kopiert und steht ständig für die Multiplikationen zur Verfügung.



REGISTER

R_0	a_0	R_4	a_4
R_1	a_1	R_5	a_5
R_2	a_2	R_6	a_6
R_3	a_3	R_7	a_7

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
1	01	31	↑
	02	31	↑
	03	31	↑
	04	24 07	RCL 7
2	05	61	x
	06	24 06	RCL 6
	07	51	+
3	08	61	x
	09	24 05	RCL 5
	10	51	+
4	11	61	x
	12	24 04	RCL 4
	13	51	+
5	14	61	x
	15	24 03	RCL 3
	16	51	+
6	17	61	x
	18	24 02	RCL 2
	19	51	+
7	20	61	x
	21	24 01	RCL 1
	22	51	+
8	23	61	x
	24	24 00	RCL 0
	25	51	+
9	26	13 00	GTO 13
	27		
	28		
	29		
	30		
	31		
	32		
	33		
	34		
	35		
	36		
	37		
	38		
	39		
	40		
	41		
	42		
	43		
	44		
	45		
	46		
	47		
	48		
	49		

HP-25 Program Form

Titel "HORNERSCHEMA FÜR POLYNOME BIS ZUM GRAD 7" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritte		f	PRGM	f	REG	
3	Koeffizienten spei-	a_7	STO	7			
	chern	a_6	STO	6			
		a_5	STO	5			
		a_4	STO	4			
		a_3	STO	3			
		a_2	STO	2			
		a_1	STO	1			
		a_0	STO	0			
4	x - Wert eingeben	x	R/S				f(x)
5	Zur Berechnung des						
	nächsten Funktionswer-						
	tes gehen Sie nach 4						

BEISPIEL:

Berechnen Sie den Funktionswert von $y = 6x^5-3x^4+x^2-7$ an der Stelle x=2 und x=-1,5

Lösung:

Tasten				Anzeige
f PRGM	f REG	6	STO 5	
		-3	STO 4	
		1	STO 2	
		-7	STO 0	
		2	R/S	141
		-1,5	R/S	-65,50

Das Programm berechnet Nullstellen einer ganzrationalen Funktion von höchstens 4-tem Grade nach dem Newtonschen Näherungsverfahren $x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$

Funktionswerte und Ableitung werden nach dem Hornerschema berechnet. Dabei wird ausgenutzt, daß

$$f'(x_o) = 4a_4x_o^3 + 3a_3x_o^2 + 2a_2x_o + a_1$$

die Ableitung von

$$f(x_o) = a_4x_o^4 + a_3x_o^3 + a_2x_o^2 + a_1x_o^1 + a_o$$

ist.

Durch die Anzeige von x_o (Programmschritt 42) läßt sich die rasche Konvergenz des Verfahrens gut verfolgen.

START

EINGABE a_i x_o ε

1: Berechne $f'(x_o)$

2: Berechne $f(x_o)$

3: $x_1 := x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$

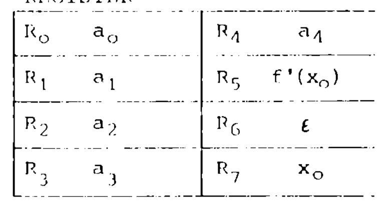
4: $x_o \rightarrow X$, $x_1 \rightarrow R_7$

Anzeige von x_1 falls gewünscht

5: $|x_o - x_1| < \varepsilon$? — nein → 6: $x_o := x_1$ (zurück zu 1); ja → 7

7: AUSGABE x_1

STOP



REGISTER

R_0	a_0	R_4	a_4
R_1	a_1	R_5	$f'(x_o)$
R_2	a_2	R_6	ε
R_3	a_3	R_7	x_o

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
1	01	24 07	RCL 7
	02	31	↑
	03	31	↑
	04	31	↑
	05	24 04	RCL 4
	06	04	4
	07	61	x
	08	61	x
	09	24 03	RCL 3
	10	03	3
	11	61	x
	12	51	+
	13	61	x
	14	24 02	RCL 2
	15	02	2
	16	61	x
	17	51	+
	18	61	x
	19	24 01	RCL 1
	20	51	+
	21	23 05	STO 5
2	22	34	CLX
	23	24 04	RCL 4
	24	61	x
	25	24 03	RCL 3
	26	51	+
	27	61	x
	28	24 02	RCL 2
	29	51	+
	30	61	x
	31	24 01	RCL 1
	32	51	+
	33	61	x
	34	24 00	RCL 0
	35	51	+
3	36	24 05	RCL 5
	37	71	÷
	38	41	-
4	39	24 07	RCL 7
	40	21	X⇄Y
6	41	23 07	STO 7
5	42	14 74	f PAUSE
	43	41	-
	44	15 03	g ABS
	45	24 06	RCL 6
	46	14 41	f x<y
	47	13 01	GTO 01
7	48	24 07	RCL 7
	49	13 00	GTO 00

HP-25 Program Form

Titel "NULLSTELLEN GANZRATIONALER FUNKTIONEN" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritte		f	PRGM	f	REG	
3	Koeffizienten	a_0	STO	0			
	speichern	a_1	STO	1			
		a_2	STO	2			
		a_3	STO	3			
		a_4	STO	4			
	Genauigkeitsschranke	ε	STO	6			
4	Startwert	x_0	STO	7			
5	Programm starten		R/S				Nullstelle
6	weitere Nullstellen:						
	Versuchen Sie mit an-						
	deren Startwerten bei						
	(4) diese zu ermitteln						

BEISPIEL:

Berechnen Sie die positive Nullstelle von $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$ mit einem Startwert $x_0=2$ und $\varepsilon=0,01$

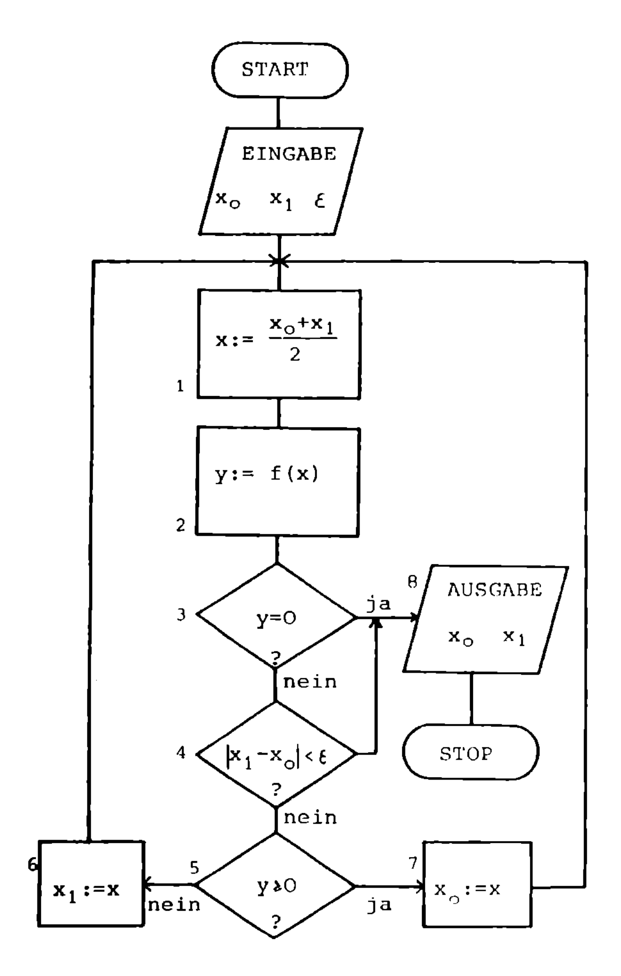
Lösung:

Tasten			Anzeige
-2	STO 0		
-1	STO 1		
2	STO 2		
1	STO 3		
0,01	STO 6		
2	STO 7	R/S	1,00002

Nach fünf Durchgängen bricht das Verfahren ab und 1,00002 wird als Nullstelle angezeigt.

"NULLSTELLEN VON FUNKTIONEN"

Zu einer Funktion f(x) sei ein Intervall (x_o, x_1) bekannt, in dem die Funktionswerte am Rand verschiedene Vorzeichen haben. Das Programm ermittelt durch fortgesetzte Intervallhalbierung und Bestimmung des Vorzeichens von $f\left(\frac{x_o+x_1}{2}\right)$ ein neues, halb so langes Intervall, das die Nullstelle enthält. Die neuen Intervallgrenzen werden durch (6) bzw. (7) festgelegt.
Das Verfahren bricht ab, falls eine Stelle x mit f(x)=0 erreicht wird (3) oder die Genauigkeitsschranke ε unterschritten ist (4). Es werden beide Intervallgrenzen des Intervalls ausgegeben, das die Nullstelle enthält.
Für stetige Funktionen muß das Verfahren nach dem Zwischenwertsatz der Analysis konvergieren.



REGISTER

R_o	x_o	R_4	
R_1	x_1	R_5	
R_2	x	R_6	
R_3		R_7	ε

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
///////	00	///////	///////
1	01	24 00	RCL 0
	02	24 01	RCL 1
	03	51	+
	04	02	2
	05	71	÷
	06	23 02	STO 2
2	07		
	08		
	09		
	10		
	11		
	12		
	13		
	14		
	15		
	16		Frei
	17		für
	18		f(x)
	19		
	20		
	21		
	22		
	23		
	24		
	25		
	26		
	27		
	28		
3	29	15 71	g x=0
	30	13 48	GTO 48
4	31	24 07	RCL 7
	32	24 01	RCL 1
	33	24 00	RCL 0
	34	41	−
	35	15 03	g ABS
	36	14 41	f x<y
	37	13 48	GTO 48
5	38	22	R↓
	39	22	R↓
	40	15 51	g x≥0
	41	13 45	GTO 45
6	42	24 02	RCL 2
	43	23 01	STO 1
	44	13 01	GTO 01
7	45	24 02	RCL 2
	46	23 00	STO 0
	47	13 01	GTO 01
8	48	24 00	RCL 0
	49	24 01	RCL 1

HP-25 Program Form

Titel "NULLSTELLEN VON FUNKTIONEN" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programmzeilen 01 bis						
	06 eintasten						
2	f(x) definieren, mit						
	GTO 29 abschließen						
3	SST drücken, bis						
	Zeile 28 erscheint						
4	Rest des Programms						
	speichern						
5	Vorbereitungsschritte		f	PRGM	f	REG	
	$f(x_0) > 0$	x_0	STO	0			
	$f(x_1) < 0$	x_1	STO	1			
	Genauigkeitsschranke	ε	STO	7			
6	Programm starten		R/S				x_0
			X⇄Y				x_1
	Nullstelle liegt im						
	Intervall (x_0, x_1)						
7	Zur Berechnung weiterer						
	Nullstellen gehen Sie						
	nach 5						

BEISPIEL:

Berechnen Sie die positive Nullstelle von $y = 4x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x - 8$ im Intervall (1;1,5)

Mit Hilfe des in dieser Sammlung angegebenen Hornerschemas ermittelt man f(1)=-9 und f(1,5)=2,875. Also ist $x_o:=1,5$ und $x_1:=1$ zu setzen.

Lösung:

1) Nach Eintasten der Schritte 01 bis 06 tastet man gemäß Hornerschema ein:

   4 x 3 - x 5 + x 7 - x 8 - GTO 29

   und SST drücken bis Programmzeile 28 erscheint; danach den Rest des Programms eintasten.
   Schieber auf RUN stellen.
   f PRGM und f REG drücken

2)

Tasten		Anzeige
1,5 STO 0	1 STO 1	
0,001 STO 7	R/S	1,424805
	X≷Y	1,425781

Eine Nullstelle liegt im Intervall (1,424;1,426)

"SIMPSONSCHE REGEL"

Das Programm hat gegenüber dem in der Sammlung von HP angegebenen den Vorteil, daß die Funktionswerte nicht einzeln eingegeben werden müssen, sondern im Programm selbst (17 Schritte zur Definition von y=f(x))

Die Simpsonsche Regel lautet:

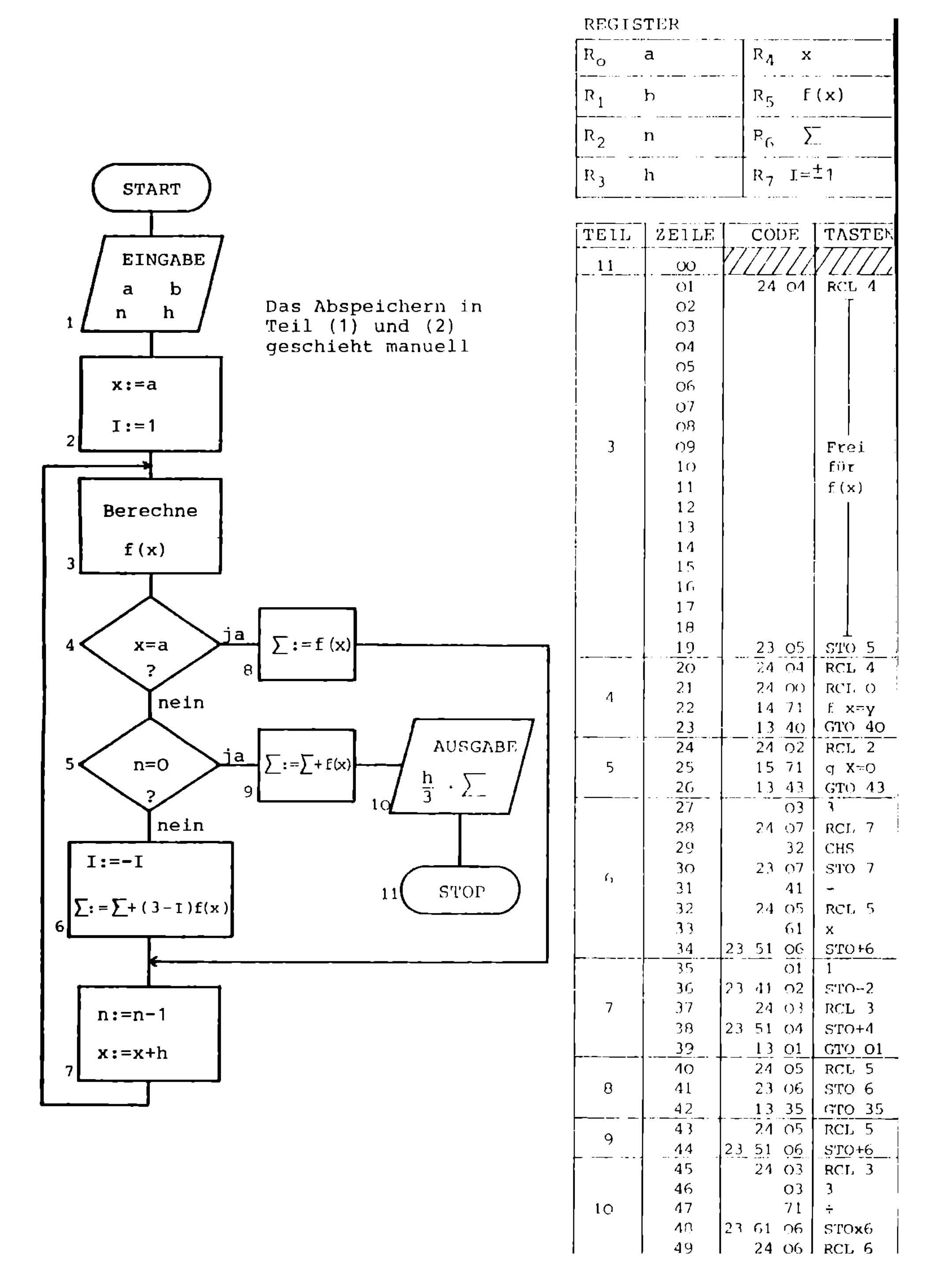
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,(y_o + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Dabei muß n eine gerade Zahl sein, $y_i := a+ih$, $h := \frac{b-a}{n}$

Die Lösung sei mit Σ bezeichnet.

In Teil (8) ist $\Sigma := y_o$ gesetzt, dann müssen abwechselnd das 4-fache bzw. das 2-fache des nächsten Funktionswertes addiert werden. Das wird in Teil (6) dadurch gelöst, daß eine Variable I eingeführt wird, die die Werte +1 und -1 annehmen kann und abwechselnd das (3+1)-fache bzw. (3-1)-fache von f(x) zu Σ addiert wird.

Beim letzten Schleifendurchlauf erfolgt in (9) Addition von y_n, Multiplikation mit $\frac{h}{3}$ und Ausgabe des Näherungswertes.



REGISTER

R_0	a	R_4	x
R_1	b	R_5	f(x)
R_2	n	R_6	$\sum$
R_3	h	R_7	$I=\pm 1$

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
11	00		
3	01	24 04	RCL 4
	02		
	03		
	04		
	05		
	06		
	07		
	08		
	09		Frei
	10		für
	11		f(x)
	12		
	13		
	14		
	15		
	16		
	17		
	18		
	19	23 05	STO 5
4	20	24 04	RCL 4
	21	24 00	RCL 0
	22	14 71	f x=y
	23	13 40	GTO 40
5	24	24 02	RCL 2
	25	15 71	g X=0
	26	13 43	GTO 43
6	27	03	3
	28	24 07	RCL 7
	29	32	CHS
	30	23 07	STO 7
	31	41	-
	32	24 05	RCL 5
	33	61	x
	34	23 51 06	STO+6
7	35	01	1
	36	23 41 02	STO-2
	37	24 03	RCL 3
	38	23 51 04	STO+4
	39	13 01	GTO 01
8	40	24 05	RCL 5
	41	23 06	STO 6
	42	13 35	GTO 35
9	43	24 05	RCL 5
	44	23 51 06	STO+6
10	45	24 03	RCL 3
	46	03	3
	47	71	÷
	48	23 61 06	STOx6
	49	24 06	RCL 6

HP-25 Program Form

Titel "SIMPSONSCHE REGEL" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programmzeile 01 ein-						
	tasten						
2	f(x) definieren, mit						
	GTO 19 abschließen						
3	SST drücken, bis						
	Zeile 18 erscheint						
4	Rest des Programms						
	speichern						
5	Schalter auf RUN						
	stellen						
6	Vorbereitungsschritte		f	PRGM	f	REG	
		a	STO	0			
		b	STO	1			
		n	STO	2			
		$h := \frac{b-a}{n}$	STO	3			
		x	STO	4			
		1	STO	7			
7	Programm starten		R/S				Integral-
							näherung
8	Für ein neues Integral						
	gehen Sie nach **6**						

BEISPIEL:

Es ist $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ nach der Simpsonschen Regel für n=4 zu berechnen.

Lösung:

1) Man tastet Schritt 01 ein und ab Schritt 02
   g x^2 1 + g $\frac{1}{x}$ GTO 19 und dann
   SST drücken bis Zeile 18 erscheint.
   Dann den Rest des Programms eintasten.

2) Eingabe per Hand:

0	STO 0	0	STO 4
1	STO 1	1	STO 7
4	STO 2		
0,25	STO 3		

3) Starten R/S Anzeige: 0,785392

Der Wert des Integrals läßt sich auch exakt berechnen:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \left[\text{arc tan } x\right]_0^1 = 0{,}785898$$

(Drücken Sie g RAD 1 g $\tan^{-1}$)
Die Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert ist also schon für n=4 sehr gut.

"DETERMINANTE EINER 3x3 MATRIX"

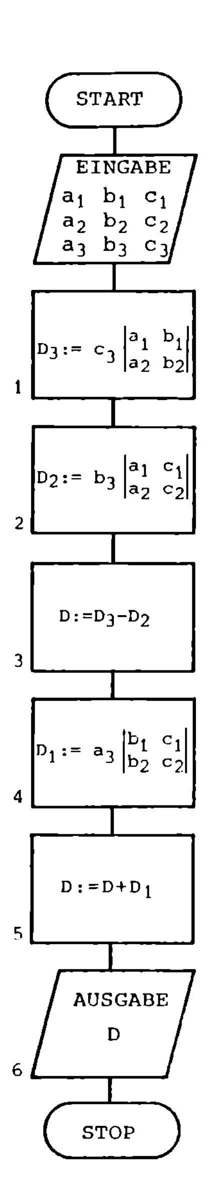
Das Problem besteht darin, daß nur 8 Datenspeicher für die 9 Koeffizienten der Matrix zur Verfügung stehen. Es wird dadurch gelöst, daß einer der Koeffizienten im X-Register gespeichert wird.

Die Speicherung der Koeffizienten der Determinante $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

erfolgt so, daß eine möglichst gute Übereinstimmung mit dem Tastenfeld des HP-25 erreicht wird, c_3 bleibt im X-Register.

Die Berechnung der Determinante erfolgt durch Entwicklung nach der letzten Zeile von rechts nach links. Dadurch wird der im X-Register gespeicherte Koeffizient c_3 nur einmal am Anfang der Rechnung benötigt.

Mit Hilfe dieses Programms lassen sich gemäß der Cramerschen Regel auch Gleichungssysteme mit 3 Variablen lösen, wobei die Zwischenergebnisse mit der Hand notiert werden müssen.
Die Lösung des Beispiel 2 dauert nach Eintasten des Programms etwa zwei Minuten.



REGISTER

R_0	a_3	R_4	a_1
R_1	a_2	R_5	b_1
R_2	b_2	R_6	c_1
R_3	c_2	R_7	b_3

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
1	01	24 04	RCL 4
	02	24 02	RCL 2
	03	61	x
	04	24 05	RCL 5
	05	24 01	RCL 1
	06	61	x
	07	41	–
	08	61	x
2	09	24 04	RCL 4
	10	24 03	RCL 3
	11	61	x
	12	24 06	RCL 6
	13	24 01	RCL 1
	14	61	x
	15	41	–
	16	24 07	RCL 7
	17	61	x
3	18	41	–
4	19	24 05	RCL 5
	20	24 03	RCL 3
	21	61	x
	22	24 06	RCL 6
	23	24 02	RCL 2
	24	61	x
	25	41	–
	26	24 00	RCL 0
	27	61	x
5	28	51	+
6	29	13 00	GTO 00
	30		
	31		
	32		
	33		
	34		
	35		
	36		
	37		
	38		
	39		
	40		
	41		
	42		
	43		
	44		
	45		
	46		
	47		
	48		
	49		

HP-25 Program Form

Titel "DETERMINANTE EINER 3x3 MATRIX" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Determinante speichern	a_1	STO	4			
		b_1	STO	5			
		c_1	STO	6			
		a_2	STO	1			
		b_2	STO	2			
		c_2	STO	3			
		a_3	STO	0			
		b_3	STO	7			
		c_3					
3	Determinante berechnen		R/S				D
4	Für eine neue Rechnung						
	gehen Sie nach 2						

BEISPIELE:

1. Berechnen Sie den Wert von $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0,5 & 5 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

Lösung: $D = 76,00$

2. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y - 3z &= 0 \\ 3x - 2y + z &= 6 \end{aligned}$$

Lösung: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -5$ $\qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -7$

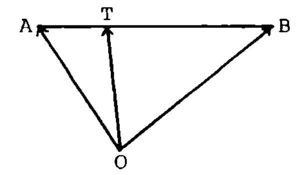
$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$y = 5$

$z = 7$

"TEILPUNKT EINER STRECKE"

Das Teilverhältnis τ ist definiert durch $\overrightarrow{AT} = \tau \cdot \overrightarrow{TB}$



Zwischen den Ortsvektoren von A, B und T besteht dann die Beziehung $\mathfrak{t} = \frac{\mathfrak{a} + \tau \mathfrak{b}}{1+\tau}$

In dem Programm werden die Stackregister ausgenutzt, um auf bequeme Weise den Vektor $\mathfrak{a}$ einzugeben und abzuspeichern. Dann hält der Rechner zur Entgegennahme der drei Komponenten von $\mathfrak{b}$ und des Teilverhältnisses τ, um dann die Werte abzuspeichern und die Rechnung durchzuführen.
Die Ausgabe der Komponenten von $\mathfrak{t}$ erfolgt über die Stackregister.

START

EINGABE $\mathfrak{a}$

1 SPEICHERN $\mathfrak{a}$

{HALT zur Eingabe von $\mathfrak{b}$ und τ

EINGABE $\mathfrak{b}, \tau$

2 SPEICHERN $\mathfrak{b}, \tau$

3 $1+\tau \rightarrow R_7$

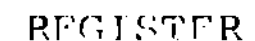
4 $t_1 := \frac{a_1+\tau b_1}{1+\tau}$

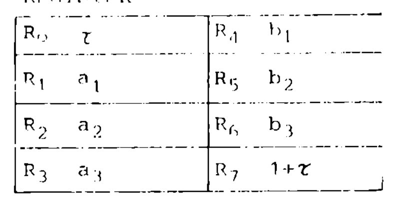
5 $t_2 := \frac{a_2+\tau b_2}{1+\tau}$

6 $t_3 := \frac{a_3+\tau b_3}{1+\tau}$

7 AUSGABE
Z: t_3
Y: t_2
X: t_1

STOP


REGISTER



R_0	τ	R_4	b_1
R_1	a_1	R_5	b_2
R_2	a_2	R_6	b_3
R_3	a_3	R_7	$1+\tau$

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
//////	00	//////	//////
1	01	23 03	STO 3
	02	22	R
	03	23 02	STO 2
	04	22	R
	05	23 01	STO 1
	06	74	R/S
2	07	23 00	STO 0
	08	23 07	STO 7
	09	22	R
	10	23 06	STO 6
	11	22	R
	12	23 05	STO 5
	13	22	R
	14	23 04	STO 4
3	15	01	1
	16	23 51 07	STO+7
6	17	24 00	RCL 0
	18	24 06	RCL 6
	19	61	x
	20	24 03	RCL 3
	21	51	+
	22	24 07	RCL 7
	23	71	÷
5	24	24 00	RCL 0
	25	24 05	RCL 5
	26	61	x
	27	24 02	RCL 2
	28	51	+
	29	24 07	RCL 7
	30	71	÷
4	31	24 00	RCL 0
	32	24 04	RCL 4
	33	61	x
	34	24 01	RCL 1
	35	51	+
	36	24 07	RCL 7
	37	71	÷
7	38	13 00	GTO 00
	39		
	40		
	41		
	42		
	43		
	44		
	45		
	46		
	47		
	48		
	49		

HP-25 Program Form

Titel "TEILPUNKT EINER STRECKE" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	PRGM			
3	α eingeben	a_1	↑				
		a_2	↑				
		a_3	R/S				a_1
4	β und τ eingeben	b_1	↑				
		b_2	↑				
		b_3	↑				
		τ	R/S				t_1
5	Komponenten des Tei-		R↓				t_2
	lungsvektors t abrufen		R↓				t_3
6	Für eine neue Rechnung						
	gehen Sie nach 3						

BEISPIEL:

Durch welchen Punkt wird die Strecke $\overline{AB}$ mit A(-5/2/-3) und B(-2/11/9) im Verhältnis τ = 1:2 geteilt?

Lösung:

Tasten		Anzeige
-5 ↑ 2 ↑ -3	R/S	
-2 ↑ 11 ↑ 9 ↑ 0.5	R/S	-4
	R↓	5
	R↓	1

Ergebnis:

Der Teilpunkt ist T(-4/5/1).

"HESSESCHE NORMALENFORM"

Das Programm berechnet die Hessesche Normalenform

$$\text{HNF:} \qquad \mathfrak{n}^0 \cdot \mathfrak{x} = d$$

einer Ebenengleichung, die in der Parameterform

$$\text{PF:} \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \lambda \mathfrak{u} + \mu \mathfrak{v}$$

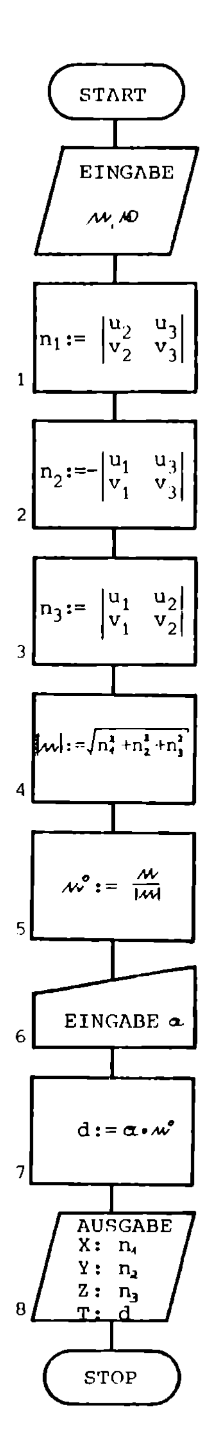
vorgegeben ist.

Falls d>O, zeigt $\mathfrak{n}^0$ vom Ursprung auf die Ebene; falls d<O sollte man die Vorzeichen von d und den Komponenten von $\mathfrak{n}^0$ wechseln, um die übliche Normierung zu erreichen.

In (1),(2) und (3) wird zunächst ein Normalenvektor berechnet

nach $$\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} u_2v_3-v_2u_3 \\ -u_1v_3+v_1u_3 \\ u_1v_2-v_1u_2 \end{pmatrix}$$

und in (4) dessen Länge berechnet. In (5) ergibt sich $\mathfrak{n}^0$ durch Division von $\mathfrak{n}$ durch die Länge von $\mathfrak{n}$. Nach Eingabe von $\mathfrak{a}$ kann in (7) d berechnet werden und in (8) die Ausgabe in den Stackregistern erfolgen.



REGISTER

R_0	n_1	n_1^0	R_4	v_1		
R_1	u_1		R_5	v_2		
R_2	u_2		R_6	v_3	n_2	n_2^0
R_3	u_3		R_7	n_3	n_3^0	

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
//////	00	//////	//////
1	01	24 02	RCL 2
	02	24 06	RCL 6
	03	61	x
	04	24 05	RCL 5
	05	24 03	RCL 3
	06	61	x
	07	41	-
	08	23 00	STO 0
2	09	24 03	RCL 3
	10	24 04	RCL 4
	11	61	x
	12	24 06	RCL 6
	13	24 01	RCL 1
	14	61	x
	15	41	-
	16	23 06	STO 6
3	17	24 01	RCL 1
	18	24 05	RCL 5
	19	61	x
	20	24 04	RCL 4
	21	24 02	RCL 2
	22	61	x
	23	41	-
	24	23 07	STO 7
4	25	15 02	g x^2
	26	24 06	RCL 6
	27	15 02	g x^2
	28	51	+
	29	24 00	RCL 0
	30	15 02	g x^2
	31	51	+
	32	14 02	f $\sqrt{x}$
5	33	23 71 00	STO÷0
	34	23 71 06	STO÷6
	35	23 71 07	STO÷7
6	36	74	R/S
7	37	24 07	RCL 7
	38	61	x
	39	21	X⇄Y
	40	24 06	RCL 6
	41	61	x
	42	51	+
	43	21	X⇄Y
	44	24 00	RCL 0
	45	61	x
	46	51	+
8	47	24 07	RCL 7
	48	24 06	RCL 6
	49	24 00	RCL 0

HP-25 Program Form

Titel "HESSESCHE NORMALENFORM" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	$\mathfrak{u}$ speichern	u_1	STO	1			
		u_2	STO	2			
		u_3	STO	3			
3	$\mathfrak{v}$ speichern	v_1	STO	4			
		v_2	STO	5			
		v_3	STO	6			
4	Programm starten		R/S				
5	$\mathfrak{a}$ eingeben	a_1	↑				
		a_2	↑				
	und starten	a_3	R/S				n_1
6	Werte abrufen		R↓				n_2
			R↓				n_3
			R↓				d
7	Für eine neue Rechnung						
	gehen Sie nach 2						

BEISPIEL:

Berechnen Sie die HNF von $E: \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

Der Rechner liefert in den Stackregistern:

X: $n_1 = 0{,}67$

Y: $n_2 = -0{,}33$

Z: $n_3 = -0{,}67$

T: $d = -2$

Wir wechseln überall die Vorzeichen, damit $d > 0$ erfüllt ist und

erhalten: $E: \begin{pmatrix} -0{,}67 \\ 0{,}33 \\ 0{,}67 \end{pmatrix} \circ \mathfrak{x} = 2$

als Hessesche Normalenform der Ebenengleichung.

"SCHNITTGERADE ZWEIER EBENEN"

Gegeben seien die Gleichungen zweier Ebenen

$E_1: \mathfrak{n} \circ \mathfrak{x} - k = 0$ und $E_2: \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \lambda \mathfrak{u} + \mu \mathfrak{v}$

Falls $\mathfrak{n}$ senkrecht ist zu $\mathfrak{u}$ und zu $\mathfrak{v}$, so ist E_1 parallel zu E_2 und es existiert keine Schnittgerade. Sei die Bezeichnung so gewählt, daß $\mathfrak{u} \circ \mathfrak{n} \neq 0$.

Die Gleichung der Schnittgeraden berechnet sich dann folgendermaßen:

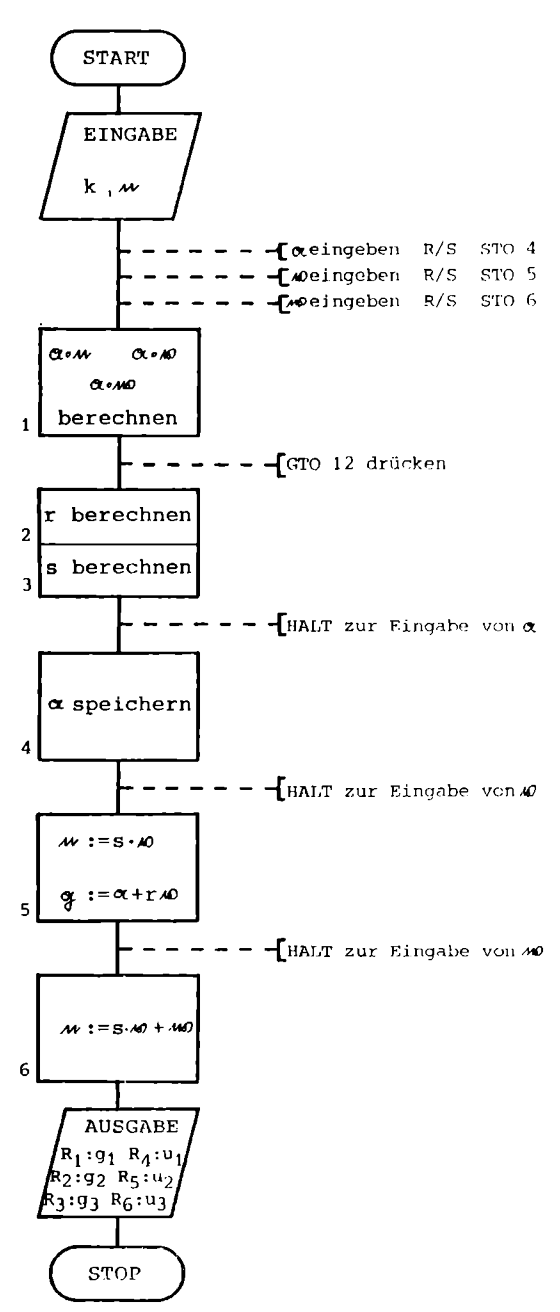
$g: \mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{a} + \lambda' \mathfrak{u} + \mu' \mathfrak{v}) - k = 0$ und daraus folgt

$$\lambda' = \underbrace{\frac{k - \mathfrak{n} \circ \mathfrak{a}}{\mathfrak{n} \circ \mathfrak{u}}}_{:=r} + \underbrace{\left(- \frac{\mathfrak{n} \circ \mathfrak{v}}{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{u}} \right)}_{:=s} \mu'$$

Die Konstanten werden mit r bzw. s bezeichnet und durch Einsetzen in die Gleichung von E_2 folgt:

$$\begin{aligned} g: \mathfrak{x}' &= \mathfrak{a} + (r + s\mu')\mathfrak{u} + \mu' \mathfrak{v} \\ &= \underbrace{(\mathfrak{a} + r\mathfrak{u})}_{:=\mathfrak{g}} + \mu' \underbrace{(s \cdot \mathfrak{u} + \mathfrak{v})}_{:=\breve{\mathfrak{n}}} \\ &= \mathfrak{g} + \mu' \breve{\mathfrak{n}} \end{aligned}$$

Das Programm erfordert wegen der beschränkten Speicherzahl zweimaliges Eingeben von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$. Da die Komponenten der Vektoren aber aus dem Stackregister abgerufen werden, ist das Programm recht bequem zu handhaben.



REGISTER

R_0	k	r		R_4 α∘w	u_1
R_1	n_1	a_1	g_1	R_5 w0∘w	u_2
R_2	n_2	a_2	g_2	R_6 ww0∘w	u_3
R_3	n_3	a_3	g_3	R_7	

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
/////	00	/////	/////
1	01	24 03	RCL 3
	02	61	x
	03	21	X⇄Y
	04	24 02	RCL 2
	05	61	x
	06	51	+
	07	21	X⇄Y
	08	24 01	RCL 1
	09	61	x
	10	51	+
	11	13 00	GTO 00
2	12	24 04	RCL 4
	13	23 41 00	STO−0
	14	24 06	RCL 6
	15	24 05	RCL 5
	16	23 71 00	STO÷0
3	17	71	÷
	18	32	CHS
	19	23 04	STO 4
	20	23 05	STO 5
	21	23 06	STO 6
	22	74	R/S
4	23	23 03	STO 3
	24	22	R↓
	25	23 02	STO 2
	26	22	R↓
	27	23 01	STO 1
	28	74	R/S
5	29	23 61 06	STO×6
	30	24 00	RCL 0
	31	61	x
	32	23 51 03	STO+3
	33	22	R↓
	34	23 61 05	STO×5
	35	24 00	RCL 0
	36	61	x
	37	23 51 02	STO+2
	38	22	R↓
	39	23 61 04	STO×4
	40	24 00	RCL 0
	41	61	x
	42	23 51 01	STO+1
	43	74	R/S
6	44	23 51 06	STO+6
	45	22	R↓
	46	23 51 05	STO+5
	47	22	R↓
	48	23 51 04	STO+4
	49	13 00	GTO 00

HP-25 Program Form

Titel "SCHNITTGERADE $E_1 \cap E_2$" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Werte speichern	k	STO	0			
		n_1	STO	1			
		n_2	STO	2			
		n_3	STO	3			
3	α eingeben	a_1	↑	a_2	↑	a_3	
			R/S				$\alpha \circ \mathfrak{n}$
	und $\alpha \circ \mathfrak{n}$ speichern		STO	4			
4	$\mathfrak{v}$ eingeben	v_1	↑	v_2	↑	v_3	
			R/S				$\mathfrak{v} \circ \mathfrak{n}$
	und $\mathfrak{v} \circ \mathfrak{n}$ speichern		STO	5			
5	$\mathfrak{w}$ eingeben	w_1	↑	w_2	↑	w_3	
			R/S				$\mathfrak{w} \circ \mathfrak{n}$
	und $\mathfrak{w} \circ \mathfrak{n}$ speichern		STO	6			
6	Faktoren berechnen		GTO	12	R/S		s
7	α eingeben	a_1	↑	a_2	↑	a_3	
			R/S				
8	$\mathfrak{v}$ eingeben	v_1	↑	v_2	↑	v_3	
			R/S				
9	$\mathfrak{w}$ eingeben	w_1	↑	w_2	↑	w_3	
			R/S				
10	Ergebnis abrufen		RCL	1			g_1
			RCL	2			g_2
			RCL	3			g_3
			RCL	4			u_1
			RCL	5			u_2
			RCL	6			u_3
11	Für eine neue Rechnung						
	gehen Sie nach 2						

BEISPIEL:

Gegeben sind die Ebenen

$E_1: \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \circ \vec{r} - 21 = 0 \qquad E_2: \quad = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}$

Gesucht ist die Gleichung der Schnittgeraden.

Lösung:

Anweisung	Tasten	Anzeige
Nr. 2	21 STO 0 1 STO 1 2 STO 2 1 STO 3	
Nr. 3	2 ↑ 3 ↑ 1 R/S STO 4	9.00
Nr. 4	-1 ↑ 3 ↑ 1 R/S STO 5	6.00
Nr. 5	4 ↑ 5 ↑ -2 R/S STO 6	12.00
Nr. 6	GTO 12 R/S	-2.00
Nr. 7	2 ↑ 3 ↑ 1 R/S	2.00
Nr. 8	-1 ↑ 3 ↑ 1 R/S	-2.00
Nr. 9	4 ↑ 5 ↑ -2 R/S	4.00
Nr. 10	Zum Abruf des Ergebnisses die entsprechenden Speicherinhalte abrufen.	

$g: \vec{r} = \begin{pmatrix}0\\9\\3\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}6\\-1\\-4\end{pmatrix}$

"BINOMIALVERTEILUNG $B_{n;p}(X=i)$ UND $B_{n;p}(i\leq X\leq j)$"

Führt man ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen (Treffer und Niete genannt) n-mal durch, so spricht man auch von einer Bernoullikette der Länge n.
Sei p die Wahrscheinlichkeit für Treffer, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau i Treffer erzielt werden:

$$B_{n;p}(X=i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

Für die Berechnung der summierten Wahrscheinlichkeiten wird die folgende Rekursionsformel benutzt:

$$B_{n;p}(X=i+1) = B_{n;p}(X=i)\ \frac{n-i}{i+1}\ \frac{p}{q}$$

In der Schleife (2),(3) wird der Binomialkoeffizient berechnet nach $\binom{n}{i} = \frac{n}{i}\ \frac{n-1}{i-1}\ \frac{n-2}{i-2}\ \ldots$, und als B bezeichnet. Hierfür werden in (1) zunächst die beiden Variablen n und i definiert, sowie B wegen der fortgesetzten Multiplikationen auf 1 gesetzt. Die Setzung $\Sigma=0$ ist im Programm nicht nötig, da der Speicherinhalt von R_6 zu Beginn Null ist.

In (4) wird B zunächst mit p^i multipliziert, q berechnet und dann der Quotient $\frac{p}{q}$ sofort mit p bezeichnet, weil er für die Rekursionsformel gebraucht wird. Dann erst wird B mit q^{n-i} multipliziert und $B_{n;p}(X=i)$ angezeigt.
In (8) erfolgt die Berechnung des nächsten Summanden nach der angegebenen Rekursionsformel. Vor der Division mit i+1 erfolgt die Erhöhung der Schleifenvariablen i:=i+1.

Bei der Berechnung von $B_{n;p}(X=i)$ ist j=0 gesetzt. Das Programm hält nach der Berechnung des ersten Summanden, j braucht also nicht eingegeben zu werden.

START

EINGABE

n_o p_o i_o

1: $n := n_o$; $i := i_o$; $B := 1$; $(\Sigma := 0)$

2: $i = 0$? — ja / nein

3: $B := B \cdot \frac{n}{i}$; $n := n-1$; $i := i-1$

4: $B := B \cdot p_o^{i_o}$; $q := 1 - p_o$; $p := p_o \cdot q^{-1}$; $B := B \cdot q^{n_o - i_o}$

5: ANZEIGE B

6: $\Sigma := \Sigma + B$

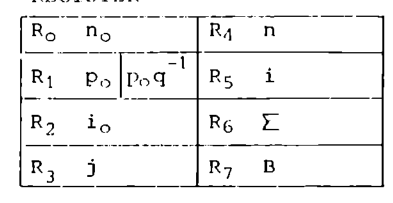
7: $i := i+1$; $B := \frac{n-1}{i+1}\, p \cdot B$

8: $j < i$? — ja / nein

9: AUSGABE Σ

STOP

REGISTER



R_0	n_o	R_4	n
R_1	p_o | $p_o q^{-1}$	R_5	i
R_2	i_o	R_6	Σ
R_3	j	R_7	B

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
1	01	24 00	RCL 0
	02	23 04	STO 4
	03	24 02	RCL 2
	04	23 05	STO 5
	05	01	1
	06	23 07	STO 7
2	07	24 04	RCL 4
	08	24 05	RCL 5
	09	15 71	g x=0
	10	13 17	GTO 17
3	11	71	÷
	12	23 61 07	STOx7
	13	01	1
	14	23 41 04	STO-4
	15	23 41 05	STO-5
	16	13 07	GTO 07
4	17	24 01	RCL 1
	18	24 02	RCL 2
	19	14 03	f y^x
	20	23 61 07	STOx7
	21	01	1
	22	24 01	RCL 1
	23	41	-
	24	23 71 01	STO÷1
	25	24 00	RCL 0
	26	24 02	RCL 2
	27	41	-
	28	14 03	f y^x
	29	23 61 07	STOx7
5	30	24 07	RCL 7
	31	14 74	f PAUSE
6	32	23 51 06	STO+6
7	33	24 00	RCL 0
	34	24 02	RCL 2
	35	41	-
	36	24 02	RCL 2
	37	01	1
	38	51	+
	39	23 02	STO 2
	40	71	÷
	41	24 01	RCL 1
	42	61	x
	43	23 61 07	STOx7
8	44	24 02	RCL 2
	45	24 03	RCL 3
	46	14 41	f x<y
	47	13 49	GTO 49
	48	13 30	GTO 30
9	49	24 06	RCL 6

HP-25 Program Form

Titel "BINOMIALVERTEILUNG" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	REG			
3	Werte speichern	n_0	STO	0			
		p_0	STO	1			
		i_0	STO	2			
4	gegebenenfalls	j	STO	3			
5	Programm starten		R/S				$B(i<X<j)$
6	Für eine neue Rechnung						
	gehen Sie nach 2						

BEISPIEL:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß beim Roulette in hundert aufeinanderfolgenden Ausspielungen

a) keinmal die Null

b) mehr als dreimal die Null

ausgespielt wird.

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Ausspielung im Roulette die Null erscheint, ist 1/37.

a) $B_{100;1/37}(X=0) = 0{,}0646$

b) $B_{100;1/37}(4 \le X \le 100) = 0{,}2856$

Der Rechner benötigt eine Rechenzeit von mehr als zwei Minuten. Schneller hat man die Lösung, wenn man die Gegenwahrscheinlichkeit berechnet.

$B_{100;1/37}(4 \le X \le 100) = 1-B_{100;1/37}(0 \le X \le 3) = 1-0{,}7144 = 0{,}2856$

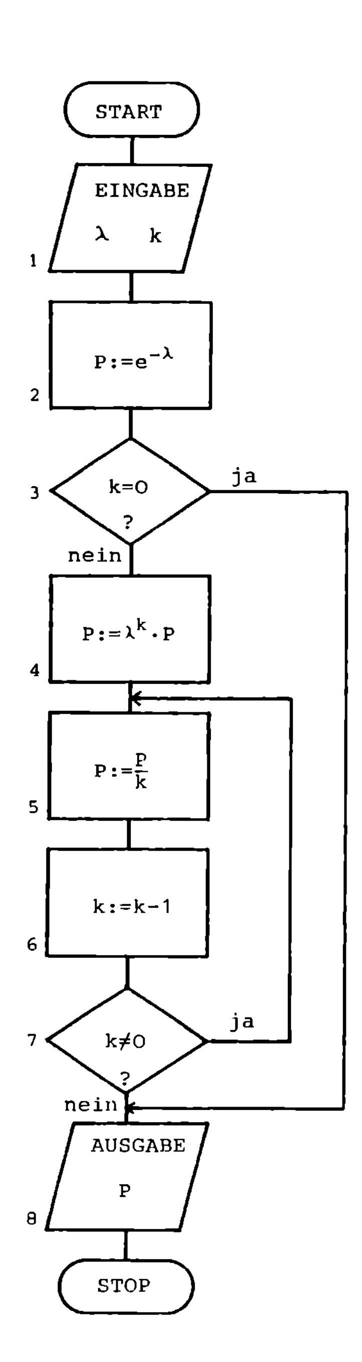
"POISSONVERTEILUNG"

Die Poissonverteilung wird auch als "Verteilung seltener Ereignisse" bezeichnet. Für große n und kleine p stellt sie eine gute Näherung der Binomialverteilung dar.
Die Poissonverteilung ist definiert durch

$$P_\lambda (X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

In der Praxis wird man hinreichend genaue Ergebnisse für $n>30$ und $p<0,1$ erhalten. Man bezeichnet $\lambda := n \cdot p$ als Parameter der Poissonverteilung; λ ist gleichzeitig der Erwartungswert der Verteilung.
Beispiele für die Anwendung der Poissonverteilung sind die
- Verteilung von Druckfehlern pro Seite in Büchern
- Verteilung von Unkrautsamen in der Samentüte
- Verteilung der Feueralarme pro Tag in einer Großstadt

Damit das Programm auch für $k=0$ anwendbar ist, ist die Abfrage(3) erforderlich. Vorher wird aber λ abgerufen, damit für die Potenzbildung λ^k Programmschritte gespart werden.



REGISTER

R_0	P	R_4	
R_1	λ	R_5	
R_2	k	R_6	
R_3		R_7	

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
//////	00	//////	//////
	01	23 02	STO 2
1	02	21	X⇄Y
	03	23 01	STO 1
	04	01	1
	05	15 07	g e^x
2	06	24 01	RCL 1
	07	32	CHS
	08	14 03	f y^x
	09	23 00	STO 0
	10	24 01	RCL 1
3	11	24 02	RCL 2
	12	15 71	g x=0
	13	13 22	GTO 22
4	14	14 03	f y^x
	15	23 61 00	STO×0
5	16	24 02	RCL 2
	17	23 71 00	STO÷0
6	18	01	1
	19	41	-
7	20	15 61	g x≠0
	21	13 17	GTO 17
8	22	24 00	RCL 0
	23	13 00	GTO 00
	24		
	25		
	26		
	27		
	28		
	29		
	30		
	31		
	32		
	33		
	34		
	35		
	36		
	37		
	38		
	39		
	40		
	41		
	42		
	43		
	44		
	45		
	46		
	47		
	48		
	49		

HP-25 Program Form

Titel "POISSONVERTEILUNG" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Werte eingeben	λ	↑				
		k					
3	Programm starten		R/S				$P_\lambda(k)$
4	Für eine neue Rechnung						
	gehen Sie nach 2						

BEISPIEL:

An einem Sommerabend wird durchschnittlich alle 10 Minuten eine Sternschnuppe beobachtet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer Viertelstunde mindestens zwei Sternschnuppen beobachtet werden?

Lösung:

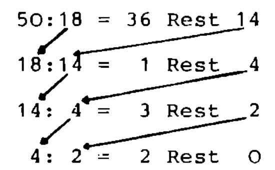
Wir nehmen an, daß die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Sternschnuppen während einer Beobachtungszeit von 15 Minuten angibt, eine Poissonverteilung besitzt.
Als Parameter verwenden wir aufgrund der Tatsache, daß im Mittel alle 10 Minuten eine Sternschnuppe beobachtet wird die Zahl
$\lambda = \frac{15}{10} = 1,5$.
Damit erhalten wir
$P_{1,5}(X>2) = 1-P_{1,5}(X=0)-P_{1,5}(X=0)$

	Tasten	Anzeige
Für $P_{1,5}(X=0)$:	1,5 ↑ 0 R/S	0,2231
Für $P_{1,5}(X=1)$:	1.5 ↑ 1 R/S	0,3347

Die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich zu etwa 44%.

"GRÖSSTER GEMEINSAMER TEILER UND KLEINSTES GEMEINSAMES VIELFACHES ZWEIER NATÜRLICHER ZAHLEN"

Das vorliegende Programm benutzt den Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des ggT zweier natürlicher Zahlen, wie er zunächst am Beispiel der Berechnung von ggT(50,18) vorgeführt wird:



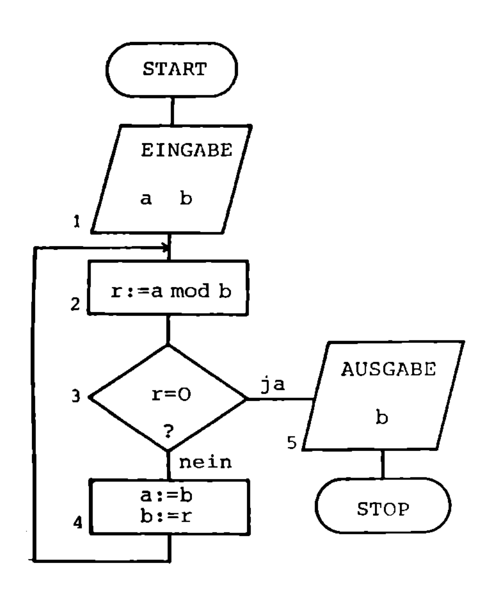
Das Verfahren bricht ab, sowie der Rest Null wird; der vorletzte Rest ist der gesuchte größte gemeinsame Teiler.

Die Berechnung des Restes r wird durch $r := a \bmod b$ (erste Zeile des Beispiels: $14 = 50 \bmod 18$) bezeichnet.

Der obere PAP liefert ein schönes Beispiel, wie ein an und für sich korrektes Programm wegen der Rundungsfehler am Abbruchkriterium (3)(r=0?) scheitern kann. Man vergleiche die vorgeführten Beispiele.

Im unteren PAP ist diese Schwierigkeit durch die Anweisung (4) (Addition von o,5 und Abschneiden des Nachkommateils) überwunden, so daß r stets eine natürliche Zahl ist, und das Abbruchkriterium nach endlich vielen Schritten erfüllt ist.

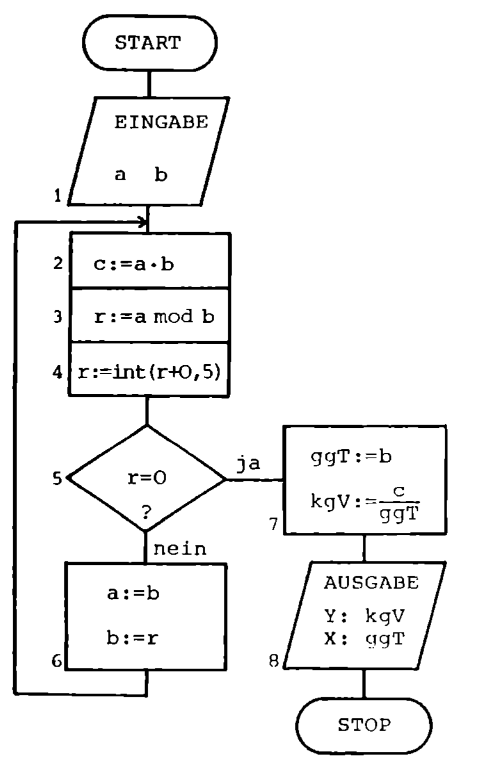
Das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b wird berechnet über die Beziehung $ggT(a,b) \cdot kgV(a,b) = a \cdot b$ und steht am Ende der Berechnung im Y-Register.



TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
//////	00	//////	//////
1	01	23 02	STO 2
	02	21	X≷Y
	03	23 01	STO 1
2	04	24 01	RCL 1
	05	24 02	RCL 2
	06	71	÷
	07	15 01	g FRAC
	08	24 02	RCL 2
	09	61	x
3	10	15 71	g x=0
	11	13 17	GTO 17
4	12	24 02	RCL 2
	13	23 01	STO 1
	14	21	X≷Y
	15	23 02	STO 2
	16	13 04	GTO 04
5	17	24 02	RCL 2
	18	13 00	GTO 00

REGISTER

R_0	R_4
R_1 a	R_5
R_2 b	R_6
R_3 c	R_7



TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
//////	00	//////	//////
1	01	23 02	STO 2
	02	21	X≷Y
	03	23 01	STO 1
2	04	61	x
	05	23 03	STO 3
3	06	24 01	RCL 1
	07	24 02	RCL 2
	08	71	÷
	09	15 01	g FRAC
	10	24 02	RCL 2
	11	61	x
4	12	73	.
	13	05	5
	14	51	+
	15	14 01	f INT
5	16	15 71	g x=0
	17	13 23	GTO 23
6	18	24 02	RCL 2
	19	23 01	STO 1
	20	21	X≷Y
	21	23 02	STO 2
	22	13 06	GTO 06
7	23	24 03	RCL 3
	24	24 02	RCL 2
	25	71	÷
	26	24 02	RCL 2
8	27	13 00	GTO 00

HP-25 Program Form

Titel "GRÖSSTER GEMEINSAMER TEILER ZWEIER ZAHLEN" Seite
(BEIDE VERSIONEN)

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Werte eingeben	a	↑				
		b					
3	Programm starten		R/S				ggT(a,b
4	(nur 2.Version)		X≷Y				kgV(a,b
5	Für eine neue Rechnung						
	gehen Sie nach 2						

BEISPIELE:

1. Berechnen Sie mit dem ersten Programm (oberer PAP) den ggT
   a) von 18 und 27
      Lösung: 18 ↑ 27 R/S   Anzeige: 9
   b) und von 12 und 9
      Lösung: 12 ↑ 9 R/S   liefert keine Lösung wegen der Rundungsfehler des Rechners.
      Nach knapp 90 Sekunden Rechenzeit bleibt der Rechner mit einem falschen Ergebnis stehen.

2. Berechnen Sie mit dem zweiten Programm (unterer PAP) ggT und kgV von 12 und 9
   Lösung: 12 ↑ 9 R/S   Anzeige: 3 (ggT)
   x↔y 36 (kgV)

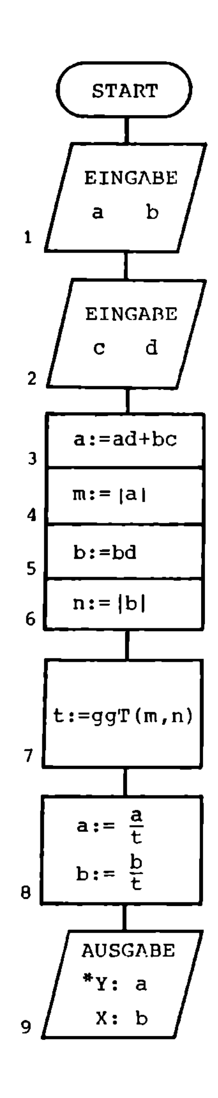
"ADDITION UND SUBTRAKTION VON BRÜCHEN"

Bei der Berechnung der Summe zweier Brüche wird zunächst der Term $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ berechnet; wobei der Zähler in (3) wieder mit a und der Nenner in (5) wieder mit b bezeichnet wird. Da das Ergebnis in der gekürzten Form ausgegeben werden soll, werden in (4) und (6) die Absolutbeträge von Zähler und Nenner gespeichert und in (7) der größte gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner berechnet.

Da der Programmabschnitt (7) in dem Programm "Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier natürlicher Zahlen" ausführlich dargestellt ist, wurde hier zur Entlastung des PAP auf eine Aufgliederung verzichtet.

In (8) erfolgt das Kürzen des Bruches und Ausgabe des Ergebnisses: Der Zähler wird kurz angezeigt und findet sich dann im Y-Register, der Nenner im X-Register. Falls erforderlich, kann durch Drücken von X⇄Y der Zähler nochmals abgerufen werden. Vor der Addition eines weiteren Bruches muß dann die Taste X⇄Y erneut gedrückt werden.

Subtraktion erfolgt durch Vorzeichenwechsel im Zähler des zweiten Bruches.
Das Programm ist auch für "Kettenrechnungen" brauchbar, wie in Beispiel 3. vorgeführt wird.



REGISTER

R_0	a	R_4	|ad+bc|
R_1	b	R_5	|bd|
R_2	c	R_6	
R_3	d	R_7	

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
1	01	23 01	STO 1
	02	21	X↕Y
	03	23 00	STO 0
	04	74	R/S
2	05	23 03	STO 3
	06	21	X↕Y
	07	23 02	STO 2
3	08	24 00	RCL 0
	09	24 03	RCL 3
	10	61	x
	11	24 01	RCL 1
	12	24 02	RCL 2
	13	61	x
	14	51	+
	15	23 00	STO 0
4	16	15 03	g ABS
	17	23 04	STO 4
5	18	24 01	RCL 1
	19	24 03	RCL 3
	20	61	x
	21	23 01	STO 1
6	22	15 03	g ABS
	23	23 05	STO 5
7	24	24 04	RCL 4
	25	24 05	RCL 5
	26	71	÷
	27	15 01	g FRAC
	28	24 05	RCL 5
	29	61	x
	30	73	.
	31	05	5
	32	51	+
	33	14 01	f INT
	34	15 71	g x=0
	35	13 41	GTO 41
	36	24 05	RCL 5
	37	23 04	STO 4
	38	21	X↕Y
	39	23 05	STO 5
	40	13 24	GTO 24
8	41	24 05	RCL 5
	42	23 71 00	STO÷0
	43	23 71 01	STO÷1
9	44	24 00	RCL 0
	45	14 74	f PAUSE
	46	24 01	RCL 1
	47	13 04	GTO 04
	48		
	49		

HP-25 Program Form

Titel "ADDITION UND SUBTRAKTION VON BRÜCHEN" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	REG			
3	1.Bruch eingeben	Zähler a					
		Nenner b	R/S				
4	2.Bruch eingeben						
	für Addition	Zähler c					
	für Subtraktion	Zähler c	CHS				
		Nenner d					*Zähler
5	Ergebnis ablesen						Nenner
			X⇄Y				Zähler
6	Für weitere Addition oder Subtraktion von Brüchen gehen Sie nach 4 (Die Reihenfolge der Stackregister darf in 5 nicht verändert werden)						
7	Für eine neue Rechnung gehen Sie nach 2						

BEISPIEL:

Berechnen Sie

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = ?$

Lösung:	Tasten	Anzeige
	1 ↑ 2 R/S	1
	1 ↑ 3 R/S	*5 6

Ergebnis: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

2. $\frac{1}{30} - \frac{11}{25} = ?$

Lösung:	Tasten	Anzeige
	1 ↑ 30 R/S	1
	11 CHS ↑ 25 R/S	*-61 150

Ergebnis: $\frac{1}{30} - \frac{11}{25} = -\frac{61}{150}$

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = ?$

Lösung:	Tasten	Anzeige
	1 ↑ 2 R/S	1
	1 ↑ 3 R/S	*5 6
	3 CHS ↑ 4 R/S	*1 12
	5 CHS ↑ 6 R/S	*-3 4

Ergebnis: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{4}$

"LERNPROGRAMM MULTIPLIKATION (ADDITION/SUBTRAKTION)"

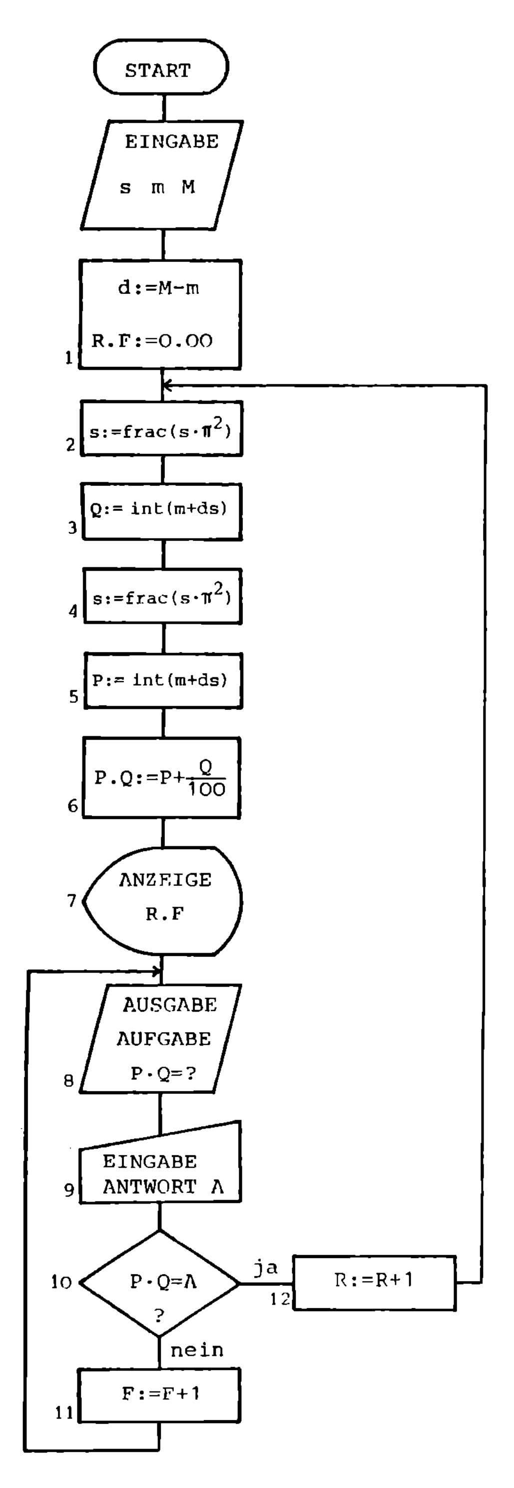
Bei diesem Programm handelt es sich um eine erweiterte Version des in der Sammlung von HP ausgegebenen Lernprogramms. Dabei wird das Minimum m in der Aufgabenstellung noch erreicht, das Maximum M wird nicht erreicht. Für das kleine Einmaleins beispielsweise ist m=0 und M=11 zu wählen, um Aufgaben im Bereich von 0·0 bis 10·10 zu erhalten. Der größte für M zulässige Wert ist M=100.
Die Anzahl der richtigen Antworten wird im Programmteil (12) als Vorkommateil und die Anzahl der falschen Antworten im Programmteil (11) als Nachkommateil in Register 7 abgespeichert und im Programmteil (7) kurz angezeigt. Es handelt sich hierbei um eine ähnliche Kopplung zweier Werte, wie sie bei (8) zur Stellung der Aufgabe vorgenommen wurde.
Selbstverständlich kann Schritt 34 ersetzt werden durch den Leerbefehl g NOP und die Leistung des Lernenden nach einer vorgegebenen Zeitspanne durch Abruf von Speicherinhalt R_7 überprüft werden.

Wenn Programmschritt 39 ersetzt wird durch [+], so erhält man ein Lernprogramm zur Addition.

Ersetzt man Programmschritt 39 durch [-], so erhält man ein Lernprogramm zur Subtraktion.

Zum Lernprogramm zur Division läßt sich das Programm nicht abwandeln, da durch Rundungsfehler des Rechners richtige Antworten durchaus als falsch registriert werden können. Zum anderen sind die erzeugten Aufgaben als Kopfrechenaufgaben in der Regel nicht geeignet.

Bei (2) und bei (4) wird eine Zufallszahl aus dem Intervall (0,1) erzeugt, hieraus durch (3) und (5) eine natürliche Zahl aus [m,M) gewonnen, wie sie zur Erzeugung der Aufgabe gebraucht wird.



REGISTER

R_0	s	R_4	P
R_1	M	R_5	Q
R_2	m	R_6	P.Q
R_3	d	R_7	R.F

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
1	01	41	−
	02	23 03	STO 3
2	03	24 00	RCL 0
	04	15 73	g π
	05	15 02	g x^2
	06	61	x
	07	15 01	g FRAC
	08	23 00	STO 0
3	09	24 03	RCL 3
	10	61	x
	11	24 02	RCL 2
	12	51	+
	13	14 01	f INT
	14	23 05	STO 5
4	15	24 00	RCL 0
	16	15 73	g π
	17	15 02	g x^2
	18	61	x
	19	15 01	g FRAC
	20	23 00	STO 0
5	21	24 03	RCL 3
	22	61	x
	23	24 02	RCL 2
	24	51	+
	25	14 01	f INT
	26	23 04	STO 4
6	27	24 05	RCL 5
	28	33	EEX
	29	02	2
	30	71	÷
	31	51	+
	32	23 06	STO 6
7	33	24 07	RCL 7
	34	14 74	f PAUSE
8	35	24 06	RCL 6
	36	74	R/S
10	37	24 04	RCL 4
	38	24 05	RCL 5
	39	61	x
	40	14 71	f x=y
	41	13 47	GTO 47
11	42	73	.
	43	00	0
	44	01	1
	45	23 51 07	STO+7
	46	13 35	GTO 35
12	47	01	1
	48	23 51 07	STO+7
	49	14 03	GTO 03

HP-25 Program Form

Titel "LERNPROGRAMM MULTIPLIKATION (ADDITION/SUBTRAKTION)" Seite

mit Anzeige Richtig/Falsch und Vorgabe von Minimum und Maximum

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	REG			
3	Zufallszahl speichern	s	STO	0			
4	Maximum und	M	STO	1			
	Minimum speichern	m	STO	2			
5	Programm starten		R/S				
	Anzeige Richtig/Falsch						*(R.F)
	Stellung der Aufgabe						P.Q
6	Lösung der Aufgabe						
	eingeben und bei Anwei-	P·Q					
	sung 5 fortfahren						
7	Zum Beginn einer neuen						
	Aufgabenserie bei 2						
	fortfahren						
8	Zur Änderung von Maxi-						
	mum und/oder Minimum						
	ohne Änderung der Feh-						
	lerzahl bei 4 fortfah-						
	ren						
	Anmerkung:						
	Die Reihenfolge der						
	Eingabe bei 4 ist ver-						
	bindlich						

BEISPIEL:

1. Programm eintasten
2. Anfangswerte speichern

s = 0.1	STO 0		
M =12	STO 1		
m = 2	STO 2		
		Anzeige R.F	Aufgabe
	R/S	(0.00)	9.11
99	R/S	(1.00)	2.05
10	R/S	(2.00)	3.10
13	R/S		3.10
30	R/S	(3.01)	5.10

3. Zur Abänderung zum Lernprogramm Addition Schritt 39 durch [+] ersetzen und bei Anweisung 2 beginnen.
4. Zur Abänderung zum Lernprogramm Subtraktion Schritt 39 durch [-] ersetzen und bei Anweisung 2 beginnen.

"LERNPROGRAMM DIVISION MIT ANZEIGE RICHTIG/FALSCH"

Anders als bei dem Programm aus der Sammlung von HP werden hier die Divisionsaufgaben als Umkehrung von Multiplikationsaufgaben erzeugt. Dadurch "gehen die Aufgaben auf", die Ergebnisse sind also stets natürliche Zahlen.
Durch Speichern einer Zahl M in R_1 wird eine obere Schranke für den Divisor Q und das Ergebnis P der Aufgabe festgelegt. Wenn Sie beispielsweise für M den Wert 9 speichern, so tritt bei den Aufgaben als größtmöglichster Wert des Divisors und des Ergebnisses der Wert 10 auf.
Dies wird durch Programmsegment (3) bzw. (5) bewirkt. Hierdurch werden gleichzeitig, anders als beim Arithmetik-Lernprogramm von HP Divisionsaufgaben mit 0 und auch mit 1 vermieden. Ebenso werden keine trivialen Aufgaben erzeugt, bei denen eine Zahl durch sich selbst dividiert werden soll.

Vor Erzeugung einer jeden neuen Aufgabe wird durch (1) die Anzahl der richtig gelösten Aufgaben als Vorkommateil und die Anzahl der falsch gelösten Aufgaben als Nachkommateil angezeigt.

Im übrigen gelten dieselben Erläuterungen wie zum Lernprogramm Multiplikation.

START

EINGABE s M

1 ANZEIGE R.F

2 $s := frac(s \cdot \pi^2)$

3 $Q := int(2 + M \cdot s)$

4 $s := frac(s \cdot \pi^2)$

5 $P := int(2 + M \cdot s)$

6 $E := P \cdot Q$

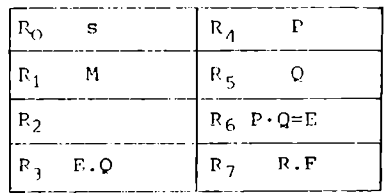
7 $E.Q := E + \frac{Q}{100}$

8 AUSGABE AUFGABE E:Q=?

9 EINGABE ANTWORT A

10 E:Q=A ? — ja: 12 R:=R+1 (zurück zu 1) — nein: 11 F:=F+1 (zurück zu 8)

REGISTER



R_0	s	R_4	P
R_1	M	R_5	Q
R_2		R_6	P·Q=E
R_3	E.Q	R_7	R.F

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
1	01	24 07	RCL 7
	02	14 74	f PAUSE
2	03	24 00	RCL 0
	04	15 73	g π
	05	15 02	g x^2
	06	61	x
	07	15 01	g FRAC
	08	23 00	STO 0
3	09	24 01	RCL 1
	10	61	x
	11	02	2
	12	51	+
	13	14 01	f INT
	14	23 05	STO 5
4	15	24 00	RCL 0
	16	15 73	g π
	17	15 02	g x^2
	18	61	x
	19	15 01	g FRAC
	20	23 00	STO 0
5	21	24 01	RCL 1
	22	61	x
	23	02	2
	24	51	+
	25	14 01	f INT
	26	23 04	STO 4
6	27	24 05	RCL 5
	28	61	x
	29	23 06	STO 6
7	30	24 05	RCL 5
	31	33	EEX
	32	02	2
	33	71	÷
	34	51	+
	35	23 03	STO 3
8	36	24 03	RCL 3
	37	74	R/S
10	38	24 04	RCL 4
	39	14 71	f x=y
	40	13 46	GTO 46
11	41	73	.
	42	00	0
	43	01	1
	44	23 51 07	STO+7
	45	13 36	GTO 36
12	46	01	1
	47	23 51 07	STO+7
	48	13 01	GTO 01
	49		

HP-25 Program Form

Titel "LERNPROGRAMM DIVISION MIT ANZEIGE RICHTIG/FALSCH" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Zufallszahl 0<s<1						
	eingeben	s	STO	0			
3	Maximum eingeben	M	STO	1			
4	Vorbereitungsschritt		f	PRGM			
5	Divisionsaufgabe erzeu-						0.00
	gen		R/S				E.Q
6	Antwort eingeben und	A					
	erneut starten		R/S				
7	War die Antwort richtig						
	so blinkt R.F(d.h. An-						
	zahl richtige/falsche						
	Antworten) und neue						
	Divisionsaufgabe wird						
	erzeugt.						
	Bei falscher Antwort						
	wird dieselbe Aufgabe						
	erneut gestellt.						(R.F)
	Fortfahren bei 6						E.Q
8	Für eine neue Aufgaben-						
	serie beginnen Sie bei		f	REG			
	2						

BEISPIEL:

Erzeugen Sie eine Serie von Divisionsaufgaben mit den Werten
s = 0,5   und   M = 20

Vorbereitung:
f REG   0,5 STO 0   20 STO 1   f PRGM

		Anzeige R.F	Aufgabe
	R/S	(0.00)	120.20
6	R/S	(1.00)	42.06
7	R/S	(2.00)	126.18
7	R/S	(3.00)	72.18
6	R/S		72.18
4	R/S	(4.01)	119.07

Erhöhen Sie den Schwierigkeitsgrad der laufenden Aufgabenserie durch neue Wahl von M = 30

Vorbereitung:
30 STO 1   R↓

		Anzeige R.F	Aufgabe
			119.07
17	R/S	(5.01)	56.14
4	R/S	(6.01)	667.23
27	R/S		667.23
29	R/S	(7.02)	36.03

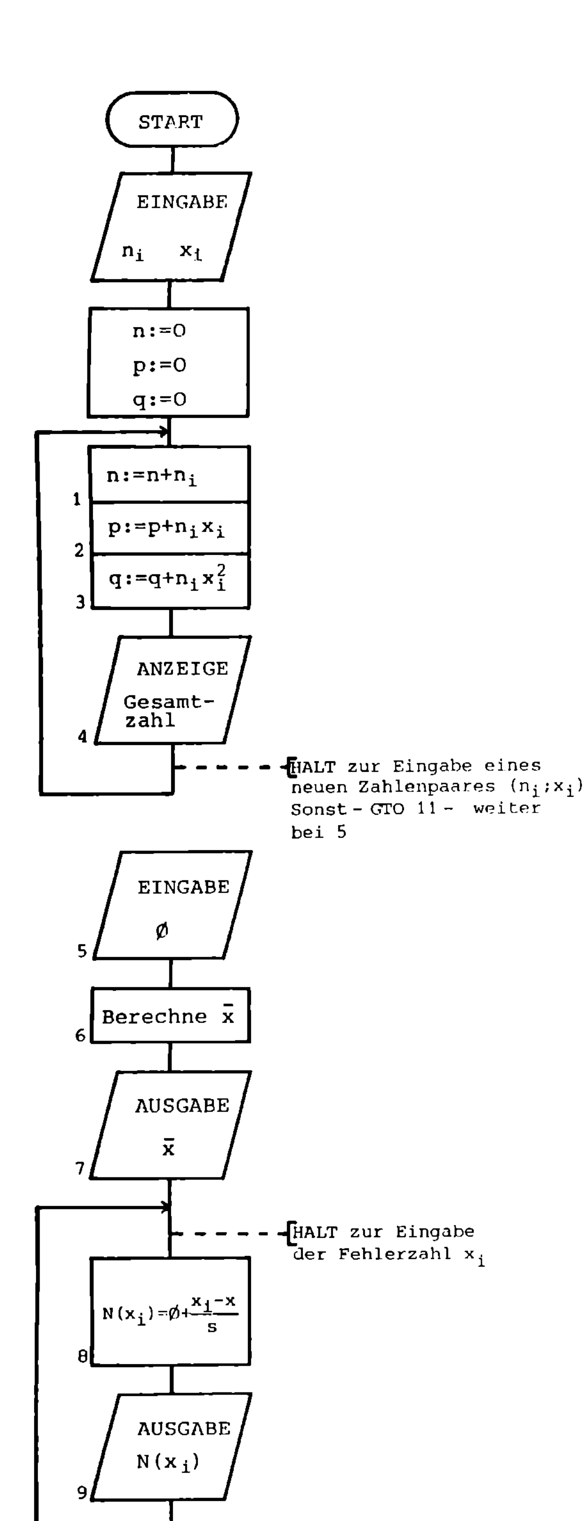
"NOTENGEBUNG"

Das Programm berechnet bei bekannter Fehlerverteilung - z.B. in einem Deutschdiktat oder Lückentest - nach Vorgabe einer gewünschten Durchschnittsnote Ø zu jeder Fehlerzahl x_i die zugehörige Note $N(x_i)$ aus.

Die Fehlerverteilung sollte etwa normal verteilt sein, um zu brauchbaren Ergebnissen zu führen.

Zunächst wird die durchschnittliche Fehlerzahl $\bar{x}$ berechnet und Standardabweichung $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum (x_i - \bar{x})}$ ermittelt.

Die Note wird über eine Standardisierung (Berechnung von $\frac{x_i - \bar{x}}{s}$) berechnet nach $N(x\ ) = Ø + \frac{x_i - \bar{x}}{s}$.



REGISTER

R_0	$\bar{x}$	R_4	
R_1	s	R_5	
R_2	Ø	R_6	$\sum n_i x_i^2 =: q$
R_3	$\sum n_i$	R_7	$\sum n_i x_i =: p$

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
1	01	21	X⇄Y
	02	23 51 03	STO+3
2	03	21	X⇄Y
	04	61	x
	05	23 51 07	STO+7
3	06	14 73	f LASTx
	07	61	x
	08	23 51 06	STO+6
4	09	24 03	RCL 3
	10	13 00	GTO 00
5	11	23 02	STO 2
	12	14 22	f s
	13	23 01	STO 1
	14	14 11 01	f FIX 1
6	15	14 21	f $\bar{x}$
	16	23 00	STO 0
7	17	74	R/S
8	18	24 00	RCL 0
	19	41	−
	20	24 01	RCL 1
	21	71	÷
	22	24 02	RCL 2
	23	51	+
	24	14 11 00	f FIX 0
9	25	13 17	GTO 13
	26		
	27		
	28		
	29		
	30		
	31		
	32		
	33		
	34		
	35		
	36		
	37		
	38		
	39		
	40		
	41		
	42		
	43		
	44		
	45		
	46		
	47		
	48		
	49		

HP-25 Program Form

Titel "NOTENGEBUNG" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritte		f	PRGM		REG	
3	Anzahl	n_i	↑				
	und Fehlerzahl	x_i	R/S				
	eingeben						
4	Anweisung 3 für alle						
	auftretenden Fehler-						
	zahlen wiederholen						
5	Gewünschten Durch-						
	schnitt eingeben	Ø	GTO			R/S	
	Anzeige: Durchschnitt-						
	liche Fehlerzahl						$\bar{x}$
6	Notenberechnung:						
	Fehlerzahl eingeben	x_i	R/S				
	Ausgabe: Note bei ein-						
	gegebener Fehlerzahl						$N(x_i)$
7	Anweisung 6 für alle						
	auftretenden Fehlerzah-						
	len wiederholen						
8	Für eine andere ge-						
	wünschte Durchschnitts-						
	note fortfahren bei 5						

BEISPIEL:

Bei einer Klassenarbeit ergab sich folgende Verteilung

Anzahl	2	0	1	2	4	6	5	3	1	0	1	0	0
Fehlerzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Es wird ein Notendurchschnitt von Ø = 3,1 gewünscht.

Nach Durchführung des Vorbereitungsschrittes (2) tastet man ein:

```
2  ↑  0    R/S
1  ↑  2    R/S
2  ↑  3    R/S
   :
   :
1  ↑  8    R/S                          Anzeige
1  ↑  10   R/S   3,1  GTO 11  R/S       4.9
                           0  R/S       1
                           1  R/S       1
                           2  R/S       2
                           3  R/S       2
                           4  R/S       3
                           5  R/S       3
                           6  R/S       4
                           7  R/S       4
                           8  R/S       4
                           9  R/S       5
                          10  R/S       5
                          11  R/S       6
                          12  R/S       6
```

Damit ergibt sich folgender Notenvorschlag:

Note	1	2	3	4	5	6
Fehlerzahl	0-1	2-3	4-5	6-8	9-10	11-12

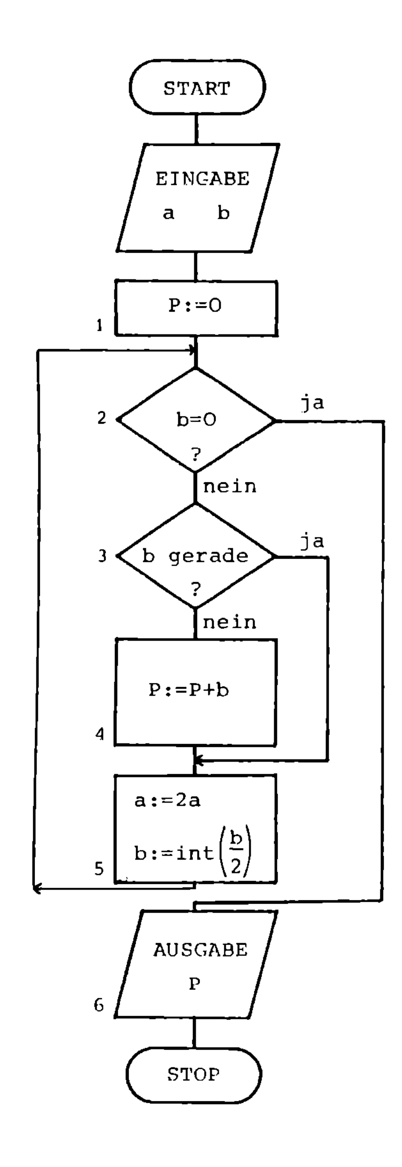
"ABESSINISCHE MULTIPLIKATION"

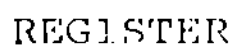
Hier wird ein Verfahren zur Berechnung des Produktes zweier Zahlen an einem Beispiel vorgestellt, das auch unter dem Namen "Abessinische Multiplikation" bekannt ist.
Das Produkt 18·25 kann nach folgendem Schema berechnet werden:

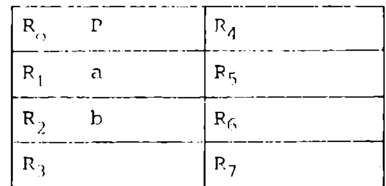
18	25
[9]	[50]
4	100
2	200
[1]	[400]
	450

Das Verfahren ist gut geeignet, den Weg über Problemanalyse, Programmablaufplan zur Programmerstellung aufzuzeigen.

Man erkennt, daß der eine Faktor ständig halbiert wird (unter Vernachlässigung des Restes) und der andere Faktor ständig verdoppelt wird. Zur Berechnung des Produktes werden diejenigen rechts stehenden Zahlen addiert, bei denen der linke Nachbar ungerade ist.
Die mathematische Analyse ist mit Hilfe der Dualzahlen sehr leicht möglich.




REGISTER



R_0	P	R_4	
R_1	a	R_5	
R_2	b	R_6	
R_3		R_7	

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
1	01	00	0
	02	23 00	STO 0
2	03	24 02	RCL 2
	04	15 71	g x=0
	05	13 20	GTO 20
3	06	02	2
	07	71	÷
	08	15 01	g FRAC
	09	15 71	g x=0
	10	13 12	GTO 12
4	11	24 01	RCL 1
	12	23 51 00	STO+0
5	13	24 02	RCL 2
	14	02	2
	15	23 61 01	STOx1
	16	71	÷
	17	14 01	f INT
	18	23 02	STO 2
	19	13 03	GTO 03
6	20	24 00	RCL 0
	21	13 00	GTO 00
	22		
	23		
	24		
	25		
	26		
	27		
	28		
	29		
	30		
	31		
	32		
	33		
	34		
	35		
	36		
	37		
	38		
	39		
	40		
	41		
	42		
	43		
	44		
	45		
	46		
	47		
	48		
	49		

HP-25 Program Form

Titel "ABESSINISCHE MULTIPLIKATION" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Faktoren speichern	a	STO	1			
		b	STO	2			
3	Programm starten		R/S				a·b
4	Für eine neue Rechnung gehen Sie nach 2						

BEISPIEL:

Berechnen Sie das Produkt 18·25

Lösung:

Tasten			Anzeige
18	STO 1		
25	STO 2	R/S	450

Der Rechner braucht zur Berechnung des Produktes fast 5 sec. Man bedenke aber, daß damals unser heutiges Verfahren zur schriftlichen Multiplikation nicht bekannt war.

"SPIELDAUER BEIM TONBANDGERÄT REVOX A 77"

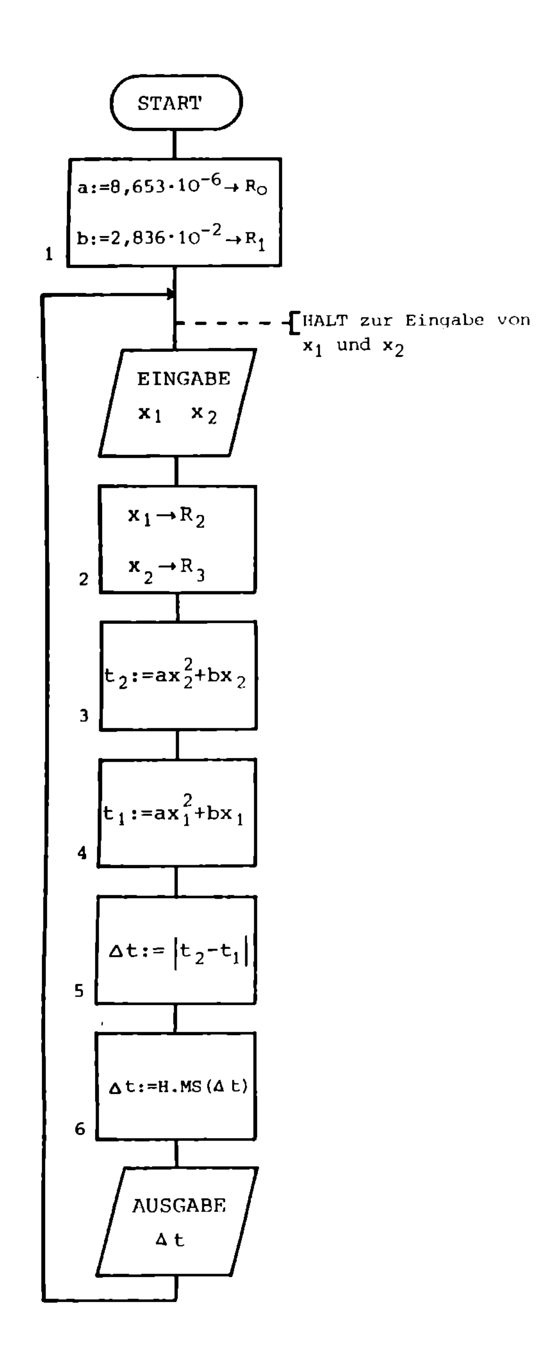
Die Abhängigkeit zwischen Zählwerkstand x_1 und Spielzeit t_1 bei der Revox A 77 wird durch die Funktion $t_1=ax_1^2+bx_1$ beschrieben. Dabei wurden $a=8{,}653\cdot10^{-6}$ und $b=2{,}836\cdot10^{-2}$ empirisch ermittelt. (Bei anderen Tonbandgeräten dürfte eine ähnliche Abhängigkeit mit anderen Faktoren a und b bestehen)

Das Programm berechnet die Spieldauer eines Stückes, wenn die Zählwerkeinstellungen x_1 und x_2 am Anfang bzw. Ende bekannt sind. Die Abweichung ist in jedem Falle geringer als 20 sec.

Vor Eingabe von x_1 und x_2 erfolgt in (1) das Abspeichern von a bzw. b durch das Programm.

Die Struktur des Programms ist sehr einfach und bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung.

Das Programm gilt für eine Geschwindigkeit von 19 $cm\,sec^{-1}$. Für 9,5 $cm\,sec^{-1}$ sind die ermittelten Zeiten zu verdoppeln.



REGISTER

R_0	a	R_4	
R_1	b	R_5	
R_2	x_1	R_6	
R_3	x_2	R_7	

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
	01	08	8
	02	73	.
	03	06	6
	04	05	5
	05	03	3
	06	33	EEX
	07	06	6
	08	32	CHS
1	09	23 00	STO 0
	10	02	2
	11	73	.
	12	08	8
	13	03	3
	14	06	6
	15	33	EEX
	16	02	2
	17	32	CHS
	18	23 01	STO 1
	19	74	R/S
	20	23 02	STO 2
2	21	22	R↓
	22	23 03	STO 3
	23	15 02	g x^2
	24	24 00	RCL 0
	25	61	x
3	26	24 03	RCL 3
	27	24 01	RCL 1
	28	61	x
	29	51	+
	30	24 00	RCL 0
	31	24 02	RCL 2
	32	15 02	g x^2
4	33	61	x
	34	24 01	RCL 1
	35	24 02	RCL 2
	36	61	x
	37	51	+
5	38	41	–
	39	15 03	g ABS
6	40	14 00	f H.MS
	41	13 19	GTO 19
	42		
	43		
	44		
	45		
	46		
	47		
	48		
	49		

HP-25 Program Form

Titel "SPIELDAUER BEIM TONBANDGERÄT REVOX A 77" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	PRGM	R/S		0.03
3	Beide Zählwerkeinstel-	x_2	↑				
	lungen in beliebiger	x_1	R/S				
	Reihenfolge eingeben						
4	Für eine weitere Be-						Dauer
	rechnung gehen Sie						
	nach 3						

BEISPIEL:

1. Nach dem Durchlaufen des Originalbandes von Revox war der Zählwerkstand 2085. Wie lange spielt das Band?

   Lösung:

Tasten		Anzeige
f PRGM	R/S	0.03
0 ↑ 2085	R/S	96.44

   Antwort: Das Band hat eine Spieldauer von 96 min 44 sec.

2. Ein Musikstück läuft von 1311 bis 1998. Wie lange dauert es?

   Lösung:

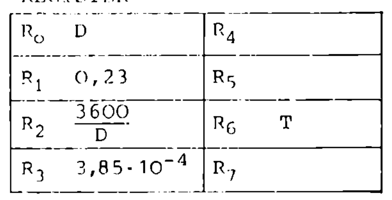
Tasten		Anzeige
1311 ↑ 1998	R/S	39.09

   Antwort: Das Musikstück dauert 39 min 9 sec.

"TELEFONGEBÜHREN"

Das Programm berechnet nach Eingabe der Dauer einer Einheit in Sekunden ständig die angefallenen Telefongebühren und zeigt sie in Abständen von ca. 1 sec. an.

Im Programm wird zunächst die Dauer D einer Einheit abgespeichert (Teil 1) und in Teil (2) der Faktor 3600:D, der in Teil (7) gebraucht wird in R_2 gespeichert. In Teil (3) wird der Summand t=0,000358 in R_3 und in (4) die Kosten je Einheit (hier 0,23 DM) in R_1 gespeichert.
Die Dauer T des Telefongesprächs ist zunächst 0.
Bei Zustandekommen der Verbindung wird erneut gestartet. In (6) wird zur Gesprächsdauer T der Summand t=0,000358 hinzuaddiert.
Eine Schleife dauert etwa 1,289 sec. Der Zahlenwert t ist 1,289 sec. in Dezimalstunden ausgedrückt, also $\frac{1,289}{3600} \approx 0,000358$. Dieser Zahlenwert kann bei jedem Rechner anders sein und muß für jeden Rechner empirisch ermittelt werden.
Da die Gesprächsdauer T in Dezimalstunden berechnet ist, wird durch Multiplikation von T mit 3600:D die Anzahl A der Einheiten in (7) berechnet. Addition von 1 und Abschneiden des Nachkommateils ist notwendig, da die Post jede angefangene Einheit voll berechnet.
In (8) wird mit den Kosten je Einheit - in der Regel 0,23 DM - multipliziert und das Ergebnis angezeigt. Danach beginnt die nächste Schleife bei (6).



REGISTER

R_0	D	R_4	
R_1	0,23	R_5	
R_2	$\frac{3600}{D}$	R_6	T
R_3	$3{,}85 \cdot 10^{-4}$	R_7	

START

EINGABE Dauer pro Einheit

1 D:=Dauer

2 3600:D→R_2

3 t:=$3{,}85 \cdot 10^{-4}$

4 0,23→R_1

5 T:=0

HALT zum Starten bei Zustandekommen der Telefonverbindung

6 T:=T+t

7 Berechne Anzahl der Einheiten

8 Berechne Kosten

9 ANZEIGE KOSTEN

TEIL	ZEILE	CODE	TASTEN
	00		
1	01	23 00	STO 0
2	02	06	6
	03	00	0
	04	15 02	g x^2
	05	21	X⇄Y
	06	71	+
	07	23 02	STO 2
3	08	73	.
	09	00	0
	10	00	0
	11	00	0
	12	03	3
	13	08	8
	14	05	5
	15	23 03	STO 3
4	16	73	.
	17	02	2
	18	03	3
	19	23 01	STO 1
5	20	00	0
	21	23 06	STO 6
	22	74	R/S
6	23	24 06	RCL 6
	24	24 03	RCL 3
	25	51	+
	26	23 06	STO 6
7	27	24 02	RCL 2
	28	61	x
	29	01	1
	30	51	+
	31	14 01	f INT
8	32	24 01	RCL 1
	33	61	x
9	34	14 74	f PAUSE
	35	13 23	GTO 23
	36		
	37		
	38		
	39		
	40		
	41		
	42		
	43		
	44		
	45		
	46		
	47		
	48		
	49		

HP-25 Program Form

Titel "TELEFONGEBÜHREN" Seite

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	PRGM			
3	Dauer einer Einheit	D	R/S				0
4	Bei Zustandekommen der						
	Telefonverbindung		R/S				Kosten
5	Bei Ende des Gesprächs						
	während der Anzeige						
	R/S drücken						
6	Für ein neues Gespräch						
	bei 2 beginnen						

BEISPIEL:

Instruieren Sie den Rechner, daß er die Kosten eines Telefongesprächs (tagsüber) zwischen Koblenz und Aachen anzeigt.

Dem amtlichen Verzeichnis der Ortsnetzkennzahlen für Koblenz entnimmt man, daß die Sprechdauer für eine Gebühreneinheit tagsüber 12 sec. ist.

Nach Drücken von f PRGM erfolgt

12 R/S	und bei Zustandekommen der Verbindung
R/S	und der Rechner zeigt in Abständen von ca. 1,3 sec. die angefallenen Telefongebühren an.